

凸五角形 $A_n B_n C_n D_n E_n$ ($n = 1, 2, \dots$) が次の条件を満たしている.

A_{n+1} は辺 $C_n D_n$ の中点 B_{n+1} は辺 $D_n E_n$ の中点 C_{n+1} は辺 $E_n A_n$ の中点 D_{n+1} は辺 $A_n B_n$ の中点 E_{n+1} は辺 $B_n C_n$ の中点

下図は、五角形 $A_n B_n C_n D_n E_n$ と五角形 $A_{n+1} B_{n+1} C_{n+1} D_{n+1} E_{n+1}$ の位置関係を図示したものである. 以下の設問に答えよ.

(1) 正の実数 α をうまく取ると、数列 $\left\{ \alpha^n \left| \frac{\overrightarrow{A_n B_n}}{n} \right| \right\}$ が 0 でない実数に収束するようにできることを示せ.

(2) 五角形 $A_n B_n C_n D_n E_n$ の 5 本の辺の長さの和を L_n 、5 本の対角線の長さの和を M_n とする. 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_n}{L_n}$ を求めよ.

ただし、五角形が凸であるとは、その内角がすべて 180° 未満であることをいう. また、五角形の対角線とは、2 頂点を結ぶ線分で辺でないもののことである.

2

(20 点)

実数 a, b が $0 \leq a < 1$ および $0 \leq b < 1$ を満たしている. このとき、次の条件 (C) を満たす 2 つの整数 m, n が存在することを示せ.

(C) xy 平面において、点 $(m + a, n + b)$ を中心とする半径 $\frac{1}{100}$ の円の内部分、 $y = x^2$ のグラフと共有点を持つ.

n を自然数とする. 投げたとき表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ ずつであるような硬貨を用意し、この硬貨を $2^n - 1$ 回投げる. このとき、 $2^{n-1} \leq k \leq 2^n - 1$ である自然数 k のうち少なくとも 1 つが次の条件 (*) を満たす確率を p_n とする.

(*) n 以下のすべての自然数 m について、 $\left\lfloor \frac{k}{2^{n-m}} \right\rfloor$ 回目の硬貨投げの結果は表である.

ただし、実数 x に対して、 $\lfloor x \rfloor$ は x より大きくない最大の整数を表す.

例えば、 p_1 は硬貨を 1 回投げて表が出る確率を表すので、 $p_1 = \frac{1}{2}$ である. p_2 は、硬貨を 3 回投げて、「1 回目と 2 回目がともに表」であるか「1 回目と 3 回目がともに表」であるかの少なくとも一方が成り立つ確率を表すので、 $p_2 = \frac{3}{8}$ である.

以下の設問に答えよ.

(1) p_{n+1} を p_n を用いて表せ.

(2) $r_n = \frac{2}{p_n} - n$ とする. すべての n に対して $r_n \geq 3$ が成り立つことを示せ.

(3) すべての n に対して

$$\frac{2}{n+3+\log n} \leq p_n \leq \frac{2}{n+3}$$

が成り立つことを示せ.

4

(20 点)

実数 a, b が $0 \leq a < 1$ および $0 \leq b < 1$ を満たしている. このとき、次の条件 (C) を満たす 2 つの整数 m, n が存在することを示せ.

(C) xy 平面において、点 $(m + a, n + b)$ を中心とする半径 $\frac{1}{100}$ の円の内部分、 $y = x^2$ のグラフと共有点を持つ.

問題は、このページで終わりである.