

1

(20 点)

a を 2 以上の整数とし、有理数 b を $b = 1 + \frac{1}{a}$ により定める。自然数 n に対して、

$$S_n = \sum_{k=1}^n k^{\frac{1}{a}}$$

とおく。ただし、 $k^{\frac{1}{a}}$ とは a 乗すると k になる正の実数のことである。以下の設問に答えよ。

- (1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n^b} = \frac{1}{b}$ を示せ。
- (2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(S_n - \frac{n^b}{b} \right) = \infty$ を示せ。

以下の設問に答えよ。ただし、 $0! = 1$ とする。

(1) n を自然数とする。 $F(x)$ は実数を係数とする x の n 次以下の多項式であって、 m が整数のとき $F(m)$ がつねに整数となるものとする。このとき、次の性質 (あ)、(い) を満たす実数 $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ が存在することを示せ。

(あ) 次の式が x についての恒等式となる。

$$\frac{F(x)}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)} = c_0 + \frac{c_1}{x+1} + \frac{c_2}{(x+1)(x+2)} + \cdots + \frac{c_n}{(x+1)(x+2)\cdots(x+n)}$$

(い) $0 \leq k \leq n$ を満たすすべての整数 k について $(n-k)!c_k$ は整数である。

(2) 0 以上の整数 k に対して、 x の k 次多項式 $P_k(x)$ を次のように定める。

$$P_0(x) = 1,$$

$$P_1(x) = x + 1,$$

$$P_2(x) = (x+1)(x+3),$$

$$\vdots$$

$$P_k(x) = (x+1)(x+3)\cdots(x+2k-3)(x+2k-1),$$

$$\vdots$$

また、 a, b を $a \leq b$ を満たす 0 以上の整数とする。このとき、 x についての次の恒等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{P_{a+b}(x)}{a!b!P_a(x)P_b(x)} = \sum_{q=0}^a \frac{2^q}{q!(a-q)!(b-q)!P_q(x)}$$

c を正の実数とする。このとき、実数 q に対して、次の条件により数列 $x_1, x_2, x_3, \dots$ を定めることを考える。

$$(A) \ x_1 = q$$

$$(B) \ x_{n+1} = \frac{1}{2c - x_n} \ (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ここで、ある自然数 k に対して $x_k = 2c$ となる場合、 x_{k+1} の値を漸化式 (B) によって定義することはできないので、このときは上記の数列を第 k 番目の項 x_k で停止させ、これをこの数列の末項とする。このように、条件 (A)、(B) により定まる数列に置いて、ある自然数 k について $x_k = 2c$ となるとき、 q を漸化式 (B) の不都合な初項と呼ぶことにする。例えば $q = 2c$ のとき、 $x_1 = 2c$ となるので、 $2c$ は漸化式 (B) の不都合な初項である。以下の設問に答えよ。

(1) $c > 1$ ならば、漸化式 (B) の不都合な初項は無限に多く存在することを示せ。

(2) $c > 1$ とする。実数 q が漸化式 (B) の不都合な初項であるとき、次の不等式を示せ。

$$c + \sqrt{c^2 - 1} < q \leq 2c$$

(3) 次の命題 (P) が成り立つような実数 c が $0 < c < 1$ の範囲に存在することを示せ。

(P) 任意に自然数 M を与えるとき、漸化式 (B) の不都合な初項 q であって、不等式

$$|q| > M$$

を満たすものが存在する。

n を自然数とする。整数 k に関する次の条件 (C)、(D) を考える。

(C) $0 \leq k < n$

(D)

$$\frac{k}{n} \leq \frac{1}{m} < \frac{k+1}{n}$$

を満たす自然数 m が存在する。

条件 (C)、(D) を満たす整数 k の個数を T_n とする。以下の設問に答えよ。

(1) T_{50} を求めよ。

(2) 次の極限值を求めよ。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log T_n}{\log n}$$

問題は、このページで終わりである。