$\boxed{\mathbf{1}}$

(20 点)

n を 3 以上の自然数、λ を実数とする．次の条件 (i), (ii) を満たす空間ベクトル $v_1, v_2, \cdots, v_n$ が存在するための n と λ が満たすべき条件を求めよ．

(i) $v_1, v_2, \cdots, v_n$ は相異なる長さ 1 の空間ベクトルである．

(ii) $i \neq j$ のときベクトル v_i と v_j の内積は λ に等しい．

2

(20 点)

自然数 n, m に対して横 n 個、縦 m 個からなる $n \times m$ 個のマスを考え、それぞれのマスに 1 つずつ白玉または黒玉を入れる．その白玉と黒玉の入れ方のうち、黒玉が上下左右いずれにも隣り合わないような入れ方の総数を $a_{n,m}$ とする．例えば $n = 5, m = 3$ のとき、図 1 の入れ方は黒玉が上下左右いずれにも隣り合わないような入れ方であり、図 2 の入れ方は黒玉が左右に隣り合っている入れ方である．

$$\begin{array}{c|cccc} \circ & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \bullet & \circ & \circ \end{array}$$

図 1

$$\begin{array}{c|cccc} \circ & \circ & \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ & \circ & \circ \end{array}$$

図 2

下の設問に答えよ．

(1) $a_{n,2}$ を求めよ．

(2) ある正の実数 D が存在して、すべての自然数 n について

$$\frac{1}{2} \leqq \frac{\log_2 a_{n,n}}{n^2} \leqq \frac{1}{2}\log_2(1+\sqrt{2}) + \frac{D}{n}$$

となることを示せ．

$\boxed{\textbf{3}}$

(20 点)

以下の条件 (i), (ii), (iii) を満たす実数の列 $x_1, x_2, \cdots, x_{1000}$ は存在するか.

(i) $x_1 = \dfrac{1}{2}$

(ii) $k = 2, 3, \cdots, 1000$ に対し、x_k は

$$\frac{x_{k-1}+99}{100}, -\frac{100x_{k-1}}{99x_{k-1}-1}$$

のいずれかに等しい．ただし、$x_{k-1} = \dfrac{1}{99}$ のときは $x_k = \dfrac{x_{k-1}+99}{100}$ とする.

(iii) $\dfrac{49}{100} < x_{1000} < \dfrac{51}{100}$

4

(20 点)

C を 1 以上の実数、$\{a_n\}$ を 0 以上の整数からなる数列で $a_1 = 0$、$a_2 = 1$ を満たすとする．xy 平面上の点 $A_n = (a_n, a_{n+1})$ はすべての $n = 1, 2, 3, \cdots$ について次の条件 (i), (ii), (iii) を満たすとする．

(i) 3 点 A_n, O, A_{n+1} は同一直線上になく、三角形 A_nOA_{n+1} と三角形 $A_{n+1}OA_{n+2}$ の内部は互いに交わらない．

(ii) 三角形 A_nOA_{n+1} の面積は C より小さい．

(iii) $\angle A_1OA_{n+1} < \dfrac{\pi}{4}$ かつ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \angle A_1OA_{n+1} = \frac{\pi}{4}$ である．

ここで O は xy 平面の原点を表す．以下の設問に答えよ．

(1) $C = 100$ のとき、(i), (ii), (iii) を満たす数列 $\{a_n\}$ の例を 1 つ与えよ．

(2) 2 以上の自然数 n, m が $n < m$ を満たすとき、

$$0 < \frac{a_{n+1}}{a_n} - \frac{a_{m+1}}{a_m} \leqq 2C\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_m}\right)$$

となることを示せ．

(3) ある実数 D が存在して、すべての自然数 n について $a_{n+1} - a_n \leqq D$ となることを示せ．

(4) ある自然数 n_0 が存在して、点 $A_{n_0}, A_{n_0+1}, A_{n_0+2}, \cdots$ はすべて同一直線上にあることを示せ．

問題は，このページで終わりである．