1 (20 点)

平面内の鋭角三角形 $\triangle$ ABC を考える。$\triangle$ ABC の内部の点 P に対して、

- 直線 BC に関して P と対称な点を D、
- 直線 CA に関して P と対称な点を E、
- 直線 AB に関して P と対称な点を F

とする。6 点 A, B, C, D, E, F が同一円周上にあるような P は $\triangle$ ABC の内部にいくつあるか求めよ。

2

(20 点)

2 つの整数 m と n が $0 < m < n$ を満たすとする。また、関数 $H(x)$ を

$$H(x) = -x\log x - (1-x)\log(1-x) \quad (0 < x < 1)$$

と定める。ただし、 $\log$ は自然対数を表す。また、 e を自然対数の底とする。以下の設問に答えよ。

(1) ${}_n\mathrm{C}_m \leqq e^{nH\left(\frac{m}{n}\right)}$ が成り立つことを示せ。

(2) $0 \leqq k \leqq n$ を満たす任意の整数 k に対して

$$ {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{m}{n}\right)^k \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k} \leqq {}_n\mathrm{C}_m \left(\frac{m}{n}\right)^m \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-m}$$

が成り立つことを示せ。

(3) ${}_n\mathrm{C}_m \geqq \dfrac{1}{n+1} e^{nH\left(\frac{m}{n}\right)}$ が成り立つことを示せ。

3

(20 点)

複素数の数列 $\{z_n\}$ に対する次の 2 つの条件を考える。

(i) すべての自然数 n に対して、$|z_n - z_{n+1}| = 2^n$ が成り立つ。

(ii) すべての自然数 n に対して、

$$\frac{(z_n - z_{n+1})(z_{n+2} - z_{n+3})}{(z_{n+1} - z_{n+2})(z_{n+3} - z_n)}$$

は実数である。

複素数の数列 $\{z_n\}$ で (i) と (ii) をともに満たすものをすべて考えたとき、

$$\frac{z_{2022} - z_{2023}}{z_{2023} - z_{2024}}$$

がとり得る値をすべて求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$

(20 点)

p を 3 以上の素数とし、a を整数とする。このとき、p^2 以上の整数 n であって

$${}_n\mathrm{C}_{p^2} \equiv a \pmod{p^3}$$

を満たすものが存在することを示せ。

問題は，このページで終わりである。