

1

(20 点)

2 以上の自然数 n に対して、 n を割り切る素数の個数を $f(n)$ とする。例えば $n = 120$ のとき、120 を割り切る素数は 2 と 3 と 5 なので、 $f(120) = 3$ である。不等式 $f(n) \geq \frac{\sqrt{n}}{2}$ を満たす 2 以上の自然数 n をすべて求めよ。

2

(20 点)

$x^{100} - 3x^{10} - 2x - 1 = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

座標平面上の円 $D_1 : x^2 + y^2 = 64$ と円 $D_2 : x^2 + (y - 4)^2 = 9$ に関して、以下の設問に答えよ。

- (1) 座標平面上の 3 点 $(0, 8)$, $(3\sqrt{7}, 1)$, $(-3\sqrt{7}, 1)$ を頂点とする三角形の外接円は D_1 であり、内接円は D_2 であることを示せ。
- (2) D_1 が外接円であり、さらに D_2 が内接円である任意の三角形 $\triangle ABC$ に対して、実数 α, β, γ を

$$\alpha = \frac{AB + BC + CA}{2} - BC,$$

$$\beta = \frac{AB + BC + CA}{2} - CA,$$

$$\gamma = \frac{AB + BC + CA}{2} - AB,$$

と定める。このとき $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 105$ が成り立つことを示せ。

t を実数とする。投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ であるコインを 10 回投げて、座標空間の点 $P_0, P_1, P_2, \dots, P_{10}$ を以下で定める。

- P_0 の座標は $(1, 2, 3)$ とする。
- n を $1 \leq n \leq 10$ を満たす任意の自然数とする。 P_{n-1} の座標が (x, y, z) であるとき、もし n 回目のコイン投げで表が出たなら P_n の座標は $((1-t)x+ty, x, z)$ とし、裏が出たなら P_n の座標は $(x, (1-t)y+tz, y)$ とする。

例えば $t = -1$ のとき、1 回目のコイン投げで表、2 回目のコイン投げで裏が出たなら、 P_0, P_1, P_2 の座標はそれぞれ $(1, 2, 3), (0, 1, 3), (0, -1, 1)$ となる。また $t = -1$ のとき、 P_1 が取り得る座標空間の点は $(0, 1, 3)$ と $(1, 1, 2)$ の 2 個である。以下の設問に答えよ。

- (1) $t = -1$ のとき、 P_3 の座標が $(1, 0, 1)$ となる確率を求めよ。
- (2) P_{10} が取り得る座標空間の点の個数を $N(t)$ とする。 $N(t) \geq 250$ となる実数 t が存在するかどうかを判定せよ。

問題は、このページで終わりである。