$\boxed{\mathbf{1}}$

(20 点)

n を自然数とする．実数 x に対し、x を超えない最大の整数を $[x]$ とし、$f(x) = x - [x]$ と定める．このとき、1 よりも大きく、かつ整数でないような実数 x のうちで、

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\frac{1}{nf(\sqrt[n]{x})}\right) = \frac{1}{2}$$

を満たすものをすべて求めよ．

2

(20 点)

n を 5 以上の自然数とする．K, O, T, Y が 1 文字ずつ書かれた 4 枚のカードを用意する．この 4 枚のカードから 1 枚を引き、書かれた文字を記録し、戻すという操作を n 回繰り返し、記録された順に文字を左から並べる．

このとき、並んだ n 個の文字の中に連続した文字列「KYOTO」が現れる確率 p_n が

$$p_n \geqq 1-\left(\frac{1023}{1024}\right)^{n-4}$$

を満たすことを示せ．

ただし、上の操作においては、それぞれのカードを毎回独立に、等しい確率で引くものとする．

3

(20 点)

座標平面における領域

$$A = \{(x, y) | y \geqq e^x\}$$

で定まる図形 A を考える．A に対して、原点を中心とする回転や平行移動を、何回か行って得られる図形を n 個用意し、それぞれ $A_1, A_2, \cdots, A_n$ とする．

このとき、$A_1, A_2, \cdots, A_n$ により座標平面全体を覆うことのできる n の最小値を求めよ．

$\boxed{\mathbf{4}}$

(20 点)

自然数 n に対して、関数 $f_n(x)$ を次で帰納的に定める.

$$f_1(x) = \sin(x)$$

$$f_n(x) = \sin(f_{n-1}(x)) \quad (n = 2, 3, 4, \cdots)$$

また、L を正の実数とし、

$$f_n(a) - \frac{a}{L} = 0$$

を満たす実数 a の個数を $A_{L,n}$ とする. このとき、以下の設問に答えよ.

(1) $L \leqq 1$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_{L,n}$ の値を求めよ.

(2) $L > 1$ のとき、$\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_{L,n}$ の値を求めよ.

ただし、0 以上の実数からなる数列 $\{a_n\}$ が、任意の n に対して $a_{n+1} \leqq a_n$ を満たすとき、数列 $\{a_n\}$ が収束することを用いてもよい.

問題は，このページで終わりである。