

〔 1 〕 (配点 50 点)

係数が 0 か 1 である x の整式を, ここでは M 多項式とよぶことにする. 整数を係数とする x の整式は, 偶数の係数を 0 でおきかえ, 奇数の係数を 1 でおきかえたと M 多項式になる. 2 つの整式は, このおきかえによって等しくなるとき合同であるという. 例えば, $5x^2 + 4x + 3$ と $x^2 - 1$ とは対応する M 多項式が共に $x^2 + 1$ となるので, 合同である.

M 多項式は, 2 つの 1 次以上の M 多項式の積と合同になるとき可約であるといい, 可約でないとき既約であるという. 例えば, $x^2 + 1$ は $(x + 1)^2$ と合同であるから, 可約である.

- (1) $x^2 + x + 1$ は既約な M 多項式であることを示せ.
- (2) 1 次から 3 次までの既約な M 多項式をすべて求めよ.
- (3) $x^4 + x + 1$ は既約な M 多項式かどうか判定せよ.

〔 2 〕 (配点 50 点)

定数 a, b を係数とする 2 次関数 $y = -ax^2 + b$ のグラフが, 原点を中心とする半径 1 の円と異なる 2 点で接しているとする. ただし, $a > 0$ とする.

- (1) a, b の条件式, および接点の座標を求めよ.
- (2) 与えられた 2 次関数のグラフと x 軸とで囲まれる部分を, y 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積 V を a を用いて表せ.
- (3) V を最小にする a, b の値, およびそのときの V の値を求めよ.

〔 3 〕 (配点 50 点)

n を自然数として, $f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k}$ とおく。

(1) $x < 1$ において,

$$f(x) = -\log(1-x) - \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt$$

が成り立つことを示せ。ここで, $\log \frac{t^n}{1-t}$ は自然対数を表す。

(2) $|x| \leq \frac{1}{3}$ とするとき, 次の不等式が成り立つことを示せ。

(i) $x \geq 0$ において,

$$\int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \leq \frac{3x^{n+1}}{2(n+1)}$$

(ii) $x < 0$ において,

$$\left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t} dt \right| \leq \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

(iii)

$$\left| f(x) - f(-x) - \log \frac{1+x}{1-x} \right| \leq \frac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)}$$

(3) この不等式を用いて, $\log 2$ の近似値を誤差が $\frac{1}{100}$ 以下となるような分数で求めよ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

A

複素数 $z = \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ$ と, それに共役な複素数 $\bar{z}$ に対し $\alpha = z + \bar{z}$ とする.

- (1) α は整数を係数とするある 3 次方程式の解となることを示せ.
- (2) この 3 次方程式は 3 個の実数解をもち, そのいずれも有理数ではないことを示せ.
- (3) 有理数を係数とする 2 次方程式で, α を解とするものは存在しないことを定理法を用いて示せ.

B

1 から n までの数で m 個からなる重複しない数の順列を作り出す算法として、下記のことを考えた。ただし、 S は順列を表し、算法の開始の時は数を含まない (S は空であるという) とする。算法の終了時には結果として順列を得るものとする。

算法 [以下 (a), (b), (c), ... の順に行う]

(a) S を空とし、 $j = n - m + 1$ とする。

(b) 1 から j までの数からデタラメに数 t を選ぶ。

(c) t が順列 S に入っているならば、 t の直後に j を入れ、そうでないならば、 t を S の先頭に入れる。

(d) j を 1 増やす。

(e) $j \leq n$ ならば、(b) へもどる。 $j > n$ ならば、終了する。

(1) $n = 10$, $m = 6$ の場合で (b) において選ばれた数 t は順に 4, 3, 6, 3, 2, 5 であった。その結果として得られる順列 S はどのような順列か。

(2) $n = 10$, $m = 6$ の場合で結果として得られた順列 S が 827593 であった。(b) で選ばれた数 t の列は何であったか。

(3) 算法の結果として得られた順列 S から (b) において選ばれた数の列を復元する算法を記述せよ。

C

a, b, c を 0 でない実数として, 空間内に 3 点 $A(a, 0, 0), B(0, b, 0), C(0, 0, c)$ をとる。

- (1) 空間内の点 P が $\overrightarrow{AP} \cdot (\overrightarrow{BP} + 2\overrightarrow{CP}) = 0$ を満たしながら動くとき, この点 P はある定点 Q から一定の距離にあることを示せ。
- (2) (1) における定点 Q は 3 点 A, B, C を通る平面上にあることを示せ。
- (3) (1) における P について, 四面体 $ABCP$ の体積の最大値を求めよ。

〔 5 〕 (配点 50 点)

D

発芽して一定期間後の，ある花の苗の高さの分布は母平均 m (cm)，母標準偏差 $\sigma = 1.5$ (cm) の正規分布であるとする．

- (1) 花壇に植えるとき，高さが 7.3 cm より低い苗と 13.0 cm より高い苗は間引くとする． $m = 10$ (cm) としたとき，苗が間引かれる確率を求めよ．
- (2) 母平均 m が未知であったため，大きさ n の標本を任意抽出して，信頼度 95% の m に対する信頼区間を求めたところ， $[9.81, 10.79]$ であった．標本平均 π の値と n を求めよ．
- (3) 赤花と白花を交配して得られた種子と，赤花同志の交配で得られた種子をまいて育てた苗の花の色を調べた．赤白交配の種子を 1，赤花のみからの種子を 0 とし，咲いた花の色については，赤白混じったものは 1，赤のみであれば 0 として，観察した結果は以下の通りとなった．種子の種類と咲いた花の色の相関係数を求めよ．

E

平面上の点の極座標を、原点 O からの距離 r (≥ 0) と偏角 θ を用いて (r, θ) で表す.

(1) 平面上の 2 曲線

$$C_1 : r = 2 \cos(\pi + \theta), \quad C_2 : r = 2(\cos \theta + 1)$$

$\left(\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}\right)$ の概形を描き、この 2 曲線 C_1, C_2 の交点の極座標を求めよ.

(2) 平面上の 3 点 P_1, P_2, E の極座標をそれぞれ $(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2), (1, 0)$ とするとき、三角形 OEP_1 と三角形 OP_2Q とが相似となる点 Q を $P_1 * P_2$ で表す. 点 $P_1 * P_2$ の極座標を求めよ. ただし、点 Q は $\angle EOP_1 = \angle P_2OQ$ となるように向きも込めて定める.

(3) 3 点 O, P_1, P_2 が同一直線上にないとき、四角形 OP_1RP_2 が平行四辺形となるような点 R を $P_1 \circ P_2$ で表す. P_1, P_2 の極座標が $(r_1, \theta_1), (r_2, \theta_2)$ で $r_1 = r_2 = r$ のとき、点 $P_1 \circ P_2$ の極座標を求めよ.

(4) さらに、平面上の点 P の極座標を (r, θ) として、実数 k に対し点 kP を、 $k \geq 0$ のときは極座標が (kr, θ) となる点、 $k < 0$ のときは $(|k|r, \theta + \pi)$ となる点とする.

(1) で求めた 2 曲線 C_1, C_2 の交点を V として、点 $k(V \circ (V * V))$ が曲線 C_1 上にあるための k の条件を求めよ.

F

3次単位行列 E の第1行の-2倍を第3行に加えた行列を P とする。

(1) $QP = E$ となる行列 Q を求めよ。

(2) 行列 $R = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$ について, $S = PR$ を求めよ。

(3) 3×3 行列 A と 3×1 行列 B が与えられているとき, $PAX = PB$ を満たす行列 X は, また $AX = B$ を満たすことを示せ。

(4) x, y, z を未知数とする連立1次方程式

$$\begin{cases} 3x - 2y + z = a \\ -3x + 4y - 5z = b \\ 6x - 5y + 4z = c \end{cases}$$

の係数が作る行列を A として, この方程式を $AX = B$ で表すとき, この両辺に左から P をかけた連立1次方程式を書け。

(5) 上と同様の操作を繰り返すことにより, (4) で与えた連立1次方程式が解を持つための条件を求め, 解があるときはその解をすべて求めよ。