

〔 1 〕 (配点 50 点)

複素数 z に対し, $w = z - a + \frac{1}{z - b}$ とおくとき, 以下の問いに答えよ.
ただし, a, b は正の整数である.

- (1) w が実数となるような z の集合を複素数平面上で示せ.
- (2) $w = 0$ をみたす z の値を α, β とし, 複素数平面で α, β に対応する点を $P(\alpha), Q(\beta)$ とする. 原点 O と点 P , 点 Q を結ぶ三角形が正三角形となるための a, b の値を求めよ.

〔 2 〕 (配点 50 点)

放物線 $y = x^2$ を考える. x 座標が

$$x_1 = t - 1, \quad x_2 = t + 1 \quad (\text{ただし}, 0 \leq t \leq 1)$$

で表される放物線上の点をそれぞれ P_1, P_2 とするとき, 以下の問いに答えよ.

- (1) 点 P_1 および点 P_2 における放物線の法線の交点を Q とするとき, 点 Q の座標 (x, y) を t の関数として表せ.
- (2) 点 Q の軌跡の概形を描け.
- (3) 点 Q の軌跡と y 軸によって囲まれる領域を y 軸のまわりに回転してできる回転体の体積 V を求めよ.

〔 3 〕 (配点 50 点)

半直線 L を図のように原点 O から出る半直線とし, z 軸となす角度を θ とする (ただし, $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$)。 $A(1, 0), B(2, 0)$ は z 軸上の点, P は L 上の点とし, $r = OP$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $\cos \angle OPA, \cos \angle OPB$ をそれぞれ r と θ を用いて表せ。
- (2) 点 P が $AP + BP$ を最小にする L 上の点であるための必要十分条件を, $\angle OPA$ と $\angle OPB$ の関係式で示せ。
- (3) 点 P が (2) の条件をみたすとき, r を θ で表せ。
- (4) 点 P が (2) の条件をみたすとき, 点 P の z 座標と y 座標の関係式を示し, θ が $0^\circ < \theta \leq 90^\circ$ の範囲を動くときの点 P の軌跡を図示せよ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

以下の問いに答えよ.

- (1) 基石 (ごいし) には白と黒の 2 種類の石がある. ところが A 君は『任意の基石の集合は 1 種類の石しか含まない』ことを以下のように証明しようとした. A 君の数学的帰納法の適用方法が誤っている理由を説明せよ.

〔 A 君の証明〕

どの基石の集合 S も 1 種類の石しか含まないことを証明したい. そこで集合 S に含まれる基石の数 n に関する数学的帰納法によってこのことを証明する.

(I) $n = 1$ の場合を考える. 1 個の基石からなるどの基石の集合 S についても, S に含まれる基石は明らかに 1 種類である.

(II) $n = k$ の場合に成立することを仮定する. すなわち, k 個の基石を含むどの基石の集合 S についても, S に含まれる基石は 1 種類であることを仮定する. そして, $n = k + 1$ の場合に成立することを示す. すなわち, $k + 1$ 個の基石を含む基石の集合 T を任意に選んだとき, T に含まれる基石は 1 種類であることを証明する.

T から勝手に 2 つの基石 a と b をとる. 残りの集合を T' とする. T' に a を加えた集合は k 個の基石を含むので, 帰納法の仮定から, この集合に含まれる基石は 1 種類である. したがって, T' に含まれる基石と a とは同じ種類である. 一方, T' に b を加えた集合も k 個の基石を含むから, 同様にして, T' に含まれる基石と b とは同じ種類である. ゆえに a と b は同じ種類である. すなわち, T は 1 種類の基石からなる.

- (2) 20 円以上の任意の値段分の切手は 5 円切手と 6 円切手の組合わせとして買えることを示せ.