

〔 1 〕 (配点 50 点)

a, b を正の定数とする. 図のように直線 L が第 1 象限において, 楕円

$$C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

と点 $P(s, t)$ (ただし, $s > 0, t > 0$) で接している. 以下の設問に答えよ.

- (1) 楕円 C で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積が $\frac{4}{3}\pi ab^2$ であることを証明せよ.
- (2) 楕円 C の第 1 象限の部分, x 軸, y 軸および直線 L で囲まれた図形 (図中の斜線部分) を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とする. V を s, t を用いて表せ.
- (3) 接点 $P(s, t)$ が楕円 C の第 1 象限の部分を動くとき, V の最小値を求め, その時の $P(s, t)$ を求めよ.

〔 2 〕 (配点 50 点)

以下の設問に答えよ.

- (1) 正の実数 a, b, c に対してつぎの不等式が成り立つことを証明せよ.

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$$

- (2) 正の実数 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) に対してつぎの不等式が成り立つことを証明せよ.

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \geq \frac{n^2}{\sum_{i=1}^n x_i}$$

〔 3 〕 (配点 50 点)

集合 $S = \{(x, y) \mid x^y = y^x, x > 0, y > 0\}$ は、概略図に示すように、半直線 $L : y = x (x > 0)$ および曲線 $C : y = g(x)$ 上の点全体と一致する。これを参考にして、以下の設問に答えよ。

- (1) 実数 t は $t > 0, t \neq 1$ とする。直線 $y = tx$ と曲線 C の交点を $P(x(t), y(t))$ としたとき、 $x(t), y(t)$ を t で表せ。
- (2) 極限值 $\alpha = \lim_{t \rightarrow 0} y(t), \beta = \lim_{t \rightarrow 1} y(t)$ を求めよ。
- (3) 関数 $y = g(x)$ は単調に減少することを示せ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

1 から n までの異なる番号が付けられた n 個の箱がある。各箱には、それが番号 k の箱ならば、白のボール k 個と黒のボール $n + 1 - k$ 個のあわせて $n + 1$ 個のボールが入っている。ランダムに 1 箱を選び、その箱から 1 個のボールを取り出してボールの色を確認してからもとに戻す。この操作を同じ箱について r 回繰り返して、白のボールが取り出された回数を確率変数 T とする。以下の設問に答えよ。

- (1) 整数 k と i を $1 \leq k \leq n$, $0 \leq i \leq r$ とする。番号 k の箱が選り出され、かつ、 $T = i$ となる確率を求めよ。
- (2) 整数 i を $0 \leq i \leq r$ とする。 $T = i$ となる確率 $P(T = i)$ を求めよ。
- (3) 整数 i を $0 \leq i \leq r$ とする。極限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(T = i)$$

を求めよ。