

〔 1 〕 (配点 50 点)

p, q を実数の定数とし,

$$y = px^4 + 5(p - q)x^3 + qx^2 + 4(p + q)x + p$$

で表される曲線を C_1 とする. この曲線と原点に関して対称な曲線を C_2 , y 軸に関して対称な曲線を C_3 とする.

- (1) 曲線 C_2, C_3 の方程式を求めよ.
- (2) 曲線 C_1 と C_2 の共有点が相異なる 2 点だけであるとき, p と q がみたすべき条件, および共有点の x 座標を求めよ.
- (3) (2) の場合に, 曲線 C_1 と C_2 とで囲まれた部分の面積を S_1 , 曲線 C_1 と C_3 とで囲まれた 2 つの部分の面積の和を S_2 とする. S_1 と S_2 の比を求めよ.

〔 2 〕 (配点 50 点)

座標平面上を動く長さ $2l$ ($l > 0$) の線分 AB を考える. この線分 AB の中点を P とする. 時刻 t における P の座標を $(x(t), y(t))$ とし, 3 点 P, A, B の速度ベクトルをそれぞれ $\vec{v}(t), \vec{v}_A(t), \vec{v}_B(t)$ とする. また, ベクトル AB が x 軸の正方向となす角を $\theta(t)$ とし, それに垂直な単位ベクトルを $\vec{e}(t) = (-\sin \theta(t), \cos \theta(t))$ とする.

- (1) $\vec{v}(t), \theta'(t)\vec{e}(t)$ を $\vec{v}_A(t), \vec{v}_B(t), l$ を用いて表せ. ただし, $\theta'(t)$ は $\theta(t)$ の導関数を表す.
- (2) 線分 AB は $\vec{v}_A(t) = t\vec{e}(t), \vec{v}_B(t) = (t+2)\vec{e}(t)$ をみたしながら運動しているとする. ただし, 初期時刻 $t = 0$ のとき $(x(0), y(0)) = (l, l^2), \theta(0) = 0$ とする. このとき, $\theta(t), x(t), y(t)$ を t の式で表せ. また, 点 P の原点からの距離 $d(t)$ を t の式で表せ.

〔 3 〕 (配点 50 点)

a を実数とし $f(a) = \int_{-1}^1 |e^x - a| dx$ とおく。

- (1) 上記右辺の定積分を求めよ。
- (2) a がすべての実数の値をとって動くとき, $f(a)$ を最小にする a の値と $f(a)$ の最小値を求めよ。
- (3) $2.7 < e < 2.8$ であることを用いて $\frac{2}{3} < \log 2 < \frac{4}{5}$ を示せ。さらにこの結果を利用して, 区間 $0 \leq a \leq 2$ における $f(a)$ の最大値を求めよ。ただし, $\log$ は自然対数を表す。

〔 4 〕 (配点 50 点)

四面体 $OABC$ において $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする。
 $\overrightarrow{AP} : |\overrightarrow{BP}| = 2 : \sqrt{3}$ をみたしながら動く点 P の軌跡を S とする。

- (1) S は球の表面 (球面) であることを示せ。
- (2) 四面体 $OABC$ が正四面体であるとき, 頂点 C は (1) での球の外部にあることを示せ。
- (3) (2) の場合に, 球面 S と辺 BC の交点を Q として, 比 $\frac{|\overrightarrow{BQ}|}{|CQ|}$ を求めよ。