〔 **1** 〕 (配点 50 点)

関数 $f(x) = \dfrac{x^3 - x}{x^2 - 4}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 不等式 $bf(a) < 0$ をみたす点 (a, b) の集合を座標平面上に図示せよ。

(2) $y = f(x)$ の極値を与える x 座標を求めよ。

(3) $y = f(x)$ の漸近線を求め，グラフの概形をかけ。

〔 **2** 〕 (配点 50 点)

次の問いに答えよ.

(1) 次の性質をもつ 4 次関数 $f(x)$ を求めよ.

(i) $y = f(x)$ のグラフは直線 $x = 0$ に関して対称である.

(ii) 方程式 $f(x) = 0$ は -1 と 1 の間に相異なる 4 個の解をもつ.

(iii) $f(x)$ の極値はすべてその絶対値が 1 に等しい. さらに $f(1) = 1$ をみたす.

(2) 次の性質をもつ 3 次関数 $g(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を 1 つ求めよ.

(i) $y = g(x)$ のグラフは x 軸と相異なる 3 個の共有点をもつ.

(ii) $p_0 = 0, p_4 = 1$ とおく. 共有点の x 座標 p_1, p_2, p_3 は $p_0 < p_1 < p_2 < p_3 < p_4$ をみたす.

(iii) 面積

$$S_i = \int_{p_{i-1}}^{p_i} (-1)^i g(x)dx \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

の比が $S_1 : S_2 : S_3 : S_4 = 1 : 2 : 2 : 1$ をみたす.

〔 **3** 〕 (配点 50 点)

座標平面上の原点にある点 P を次のルールで移動させるゲームを考える。

(i) 赤、白、青、黄色の玉がそれぞれ 1 個ずつ入っている袋の中から玉を 1 個取り出して色を見た後で袋に戻す操作を繰り返す。

(ii) 取り出した玉が赤色であれば点 P を現在の座標から x 軸の正の方向に 1 だけ移動させる。玉が、白、青、黄色であれば、点 P をそれぞれ x 軸の負の方向、y 軸の正の方向および y 軸の負の方向に 1 だけ移動させる。

(iii) 点 P を 1 回移動させるたびに点数 1 を得る。ただし、点 P が点 $A(1,1)$ に到着した場合は 2 点加算されて点数 3 を得る。

(iv) 移動を 4 回繰り返すか、または点 P が点 A に到着したときに、ゲームは終了する。

このとき、次の問いに答えよ。

(1) 点 P が点 A に到達する確率を求めよ。

(2) ゲーム終了時の合計点数の期待値を求めよ。

〔 **4** 〕 (配点 50 点)

関数 $f(x)$ は区間 $0 \leqq x \leqq 1$ において連続で $0 \leqq f(x) \leqq 1$ をみたす．このとき次の問いに答えよ.

(1) $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = x$ は共有点を持つことを証明せよ.

(2) $f(x)$ が微分可能で $|f'(x)| \leqq \dfrac{1}{2}$ をみたすならば,

$$0 \leqq x_1 \leqq 1 \quad と \quad x_{n+1} = f(x_n), \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

によって定義される数列 $\{x_n\}$ は $n \to \infty$ のとき収束することを証明せよ.