

〔 1 〕 (配点 50 点)

直線 $l: y = x + a$ が曲線 $C: y = 2 \sin x$ ($-\pi \leq x \leq \pi$) に接しているとき、次の問いに答えよ。ただし、 $a \geq 0$ とする。

- (1) a の値を求めよ。
- (2) 曲線 C と直線 l で囲まれた図形の $y \geq 0$ の範囲にある部分を、 x 軸のまわりに回転する。この回転体の体積を求めよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

行列 A と列ベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ を $A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とし, 列ベクトル $\vec{p}_n$ ($n = 1, 2, \dots$) を $\vec{p}_1 = \vec{a}$, $\vec{p}_{n+1} = A\vec{p}_n + \vec{b}$ ($n = 1, 2, \dots$) で定める。このとき次の問いに答えよ。

- (1) $\vec{p} = A\vec{p} + \vec{b}$ を満たす列ベクトル $\vec{p}$ を求めよ。
- (2) $\vec{q}_n = \vec{p}_n - \vec{p}$ ($n = 1, 2, \dots$) とおく。 $\vec{q}_{n+1}$ と $\vec{q}_n$ の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (3) $n = 1, 2, \dots$ に対して A^n を求めよ。
- (4) $\vec{p}_n$ ($n = 1, 2, \dots$) を求めよ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

t を実数とするととき, 2 次方程式 $z^2 + tz + t = 0$ について, 次の問いに答えよ.

- (1) この 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と, そのときの虚数解をすべて求めよ.
- (2) (1) の虚数解のうち, その虚部が正のものを $z(t)$ で表す. t が (1) で求めた範囲を動くとき, 複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め, 図示せよ.
- (3) 複素数平面上で, 点 z が (2) の図形 C 上を動くとき, $w = \frac{iz}{z+1}$ で表される点 w が描く図形を求め, 図示せよ.

〔 4 〕 (配点 50 点)

実数 x に対して, $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。例えば,

$$\left[\frac{3}{2} \right] = 1, [2] = 2$$

である。このとき, $0 < \theta < \pi$ として次の問いに答えよ。ただし, 必要な $b \sin \alpha = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 α ($0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$) を用いてよい。

- (1) 不等式 $\log_2 \left[\frac{5}{2} + \cos \theta \right] \leq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。
- (2) 不等式 $\left[\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta \right] \geq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。
- (3) 不等式 $\log_2 \left[\frac{5}{2} + \cos \theta \right] \leq \left[\frac{3}{2} + \log_2 \sin \theta \right]$ を満たす θ の範囲を求めよ。

〔 5 〕 (配点 50 点)

実数 t が $t \geq 0$ の範囲を動くとき, xy 平面上で点 $P(t^2, e^{-t})$ が描く曲線を C とする. a を正の実数とし, 曲線 C と x 軸, y 軸, および直線 $x = a^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする. このとき次の問いに答えよ.

(1) 面積 $S(a)$ を求めよ.

(2) $a > 0$ の範囲で関数 $S(a)$ の増減, 凹凸を調べ, そのグラフの概形を描け. ただし,

$$\lim_{a \rightarrow \infty} ae^{-a} = 0$$

であることを用いてよい.

(3) $S(a) = 1.35$ となる a が $2 < a < 3$ の範囲に存在することを示せ. ただし, 必要な

$$2.5 < e < 3$$

であることを用いてよい.