

〔 1 〕 (配点 50 点)

A, B の 2 人が同時に 1 個ずつサイコロを投げて勝負をする. 出た目の大きい方を勝ちとしてそちらにのみ 1 点を加え, 出た目が等しい場合には引き分けとしてどちらにも点を加えないものとする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 4 回連続して勝負した結果, A と B の総得点が等しくなる確率 P_1 を求めよ.
- (2) 5 回連続して勝負する場合を考える. 1 回目の勝負で A が勝ったという条件のもとで, B の方が A よりも総得点が高くなる条件つき確率 P_2 を求めよ.

〔 2 〕 (配点 50 点)

関数

$$f(x) = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^3 - (1+x)\log(1+x) \quad (0 \leq x \leq 5)$$

について、以下の問いに答えよ.

(1) $0 \leq x \leq 5$ の範囲で、 $f'(x) \geq 0$ となることを示せ. ただし、 $\log 2 = 0.69$, $\log 3 = 1.10$, $\log 5 = 1.61$, $\log 7 = 1.95$ という近似値を用いてよい.

(2) $0 \leq x \leq 5$ の範囲で二つの曲線

$$y = x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{24}x^3, \quad y = (1+x)\log(1+x)$$

によって囲まれた部分の面積を求めよ.

〔 3 〕 (配点 50 点)

関数 $f(x) = x^2 + 2px + q$ を用いて, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 0, \quad a_{n+1} = -rf'(a_n) + a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

と定める. ただし, p, q, r は実数で, $p \neq 0$ かつ $0 < r < \frac{1}{2}$ とする.

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_{n+1} - a_n|$$

を求めよ.

(3) m を $f(x)$ の最小値とする. 任意の n について $|f(a_{n+1}) - m| < |f(a_n) - m|$ が成り立つことを示せ.

〔 4 〕 (配点 50 点)

原点 O を中心とする半径 r の球面上に点 A, B, C を置き, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする. ベクトル $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ 間の内積に, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, $\vec{b} \cdot \vec{c} = kr^2$, $\vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ (ただし, $0 \leq k < 1$) の関係がある場合について, 次の問いに答えよ.

- (1) 平面 ABC 上の点 N について, ベクトル $\overrightarrow{ON} = \vec{n}$ を $\vec{n} = s\vec{a} + t\vec{b} + u\vec{c}$ で表すとき, $s + t + u = 1$ となることを示せ.
- (2) (1) のベクトル $\overrightarrow{ON}$ の大きさが最小となるような s, t, u を, k を用いて示せ.
- (3) 点 O, A, B, C を頂点とする三角錐の体積 V を, k と r を用いて示せ.

〔 5 〕 (配点 50 点)

t と θ を実数とし, 行列を次のように定義する:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ただし, $0 < \theta < \pi$ とする.

- (1) $t(PJ + J) + P - E = O$ を満たす行列 P を求めよ.
- (2) $t = \tan \frac{\theta}{2}$ のとき, θ を用いて (1) の P を表せ.
- (3) (2) の P に対して, $P^3 = E$ となる θ を求めよ.