

〔 1 〕 (配点 50 点)

次の問いに答えよ. ただし, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x} = 0$ であること, また, e は自然対数の底で, $e < 3$ であることを用いてよい.

- (1) 自然数 n に対して, 方程式 $\frac{\log x}{x} = \frac{1}{3n}$ は $x > 0$ の範囲にちょうど 2 つの実数解をもつことを示せ.
- (2) (1) の実数解を α_n, β_n ($\alpha_n < \beta_n$) とするとき, $1 < \alpha_n < e^{\frac{1}{n}}$, $ne < \beta_n$ が成り立つことを示せ. また, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n$ を求めよ.

〔 2 〕 (配点 50 点)

△ OAB において、辺 OB の中点を M、辺 AB を $\alpha : 1 - \alpha$ に内分する点を P とする。ただし、 $0 < \alpha < 1$ とする。線分 OP と AM の交点を Q とし、Q を通り、線分 AM に垂直な直線が、辺 OA またはその延長と交わる点を R とする。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ 、 $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ として、次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ および α を用いて表せ。
- (2) $|\vec{a}| = 2$ 、 $|\vec{b}| = 3$ 、 $\angle AOB = \theta$ で $\cos \theta = \frac{1}{6}$ とする。このとき、ベクトル $\overrightarrow{OR}$ を $\vec{a}$ と α を用いて表せ。
- (3) (2) の条件のもとで、点 R が辺 OA の中点であるときの α の値を求めよ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は, $a_1 = b_1 = 1$ および, 関係式

$$a_{n+1} = 2a_nb_n$$

$$b_{n+1} = 2a_n^2 + b_n^2$$

をみたすものとする.

- (1) $n \geq 3$ のとき, a_n は 3 で割り切れるが, b_n は 3 で割り切れないことを示せ.
- (2) $n \geq 2$ のとき, a_n と b_n は互いに素であることを示せ.

〔 4 〕 (配点 50 点)

関数 $f(x) = \left| \sin x - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{2}$ を考える。ただし, $-\pi \leq x \leq \pi$ とする。さらに, $0 \leq a \leq \frac{\pi}{2}$ に対して,

$$F(a) = \int_0^a f(x) f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) dx$$

とする。このとき次の問いに答えよ。

- (1) $f(x) = 0$ となる x を求めよ。
- (2) 関数 $y = f(x)$ のグラフの概形を描け。
- (3) $F(a)$ を求めよ。

〔 5 〕 (配点 50 点)

区間 $[a, b]$ が関数 $f(x)$ に関して不変であるとは, $a \leq x \leq b$ ならば, $a \leq f(x) \leq b$ が成り立つこととする。 $f(x) = 4x(1 - x)$ とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 区間 $[0, 1]$ は関数 $f(x)$ に関して不変であることを示せ。
- (2) $0 < a < b < 1$ とする。このとき, 区間 $[a, b]$ は関数 $f(x)$ に関して不変ではないことを示せ。