

〔 1 〕 (配点 50 点)

2 つの曲線 $C_1 : y = ax^2$, $C_2 : x^2 + (y - p)^2 = r^2$ が異なる 2 点で接するとする。

ただし a, p, r を正の定数とする。

- (1) p を a と r の式で表せ。また、曲線 C_1 と C_2 の接点の x 座標 q を a と r の式で表せ。ただし $q > 0$ とする。
- (2) $ar = 1$ のとき、曲線 C_1 と C_2 によって囲まれた部分の面積を求めよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

A と B の 2 つの袋があり, A の袋には赤玉が 2 個, 白玉が 5 個, B の袋には赤玉が m 個, 白玉が n 個入っている. ただし, m と n は 0 以上の整数で $m + n = 4$ とする.

- (1) A の袋から 3 個の玉を同時に取り出すとき, 赤玉が 2 個, 白玉が 1 個である確率 P_1 を求めよ.
- (2) A の袋から 3 個の玉を取り出し, それらを B の袋に入れる. その後 B の袋から 2 個の玉を同時に取り出すとき, 赤玉が 1 個, 白玉が 1 個である確率 P_2 を求めよ.
- (3) 確率 P_2 が最大となる m と n の値を求めよ.

〔 3 〕 (配点 50 点)

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{2a_n}{5a_n + c} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

と定める。ただし、 c は $0 \leq c < 2$ を満たす定数とする。

(1) $b_n = \frac{1}{a_n}$ とおくとき,

$$b_{n+1} - pb_n = q \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となる定数 p, q を c の式で表せ。

(2) a_n を n と c の式で表せ。

(3) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ を c の式で表せ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

平面上に異なる n 個の点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ を考える。ただし, $x_k > 0$ ($k = 1, 2, \dots, n$) とする。また, 次の関数 $f(a)$ の最小値を与える a を a_0 とする。

$$f(a) = \sum_{k=1}^n (ax_k - y_k)^2$$

- (1) a_0 を求めよ。
- (2) n 個の点のいずれも, 直線 $y = a_0x$ 上にはないものとする。このとき, n 個の点のうち少なくとも 1 点は直線 $y = a_0x$ の上側にあることを示せ。
- (3) $x_k = bk, y_k = c$ ($k = 1, 2, \dots, n$) とする。ここで, b, c は正の定数である。このとき, n 個の点のうちの 1 点が直線 $y = a_0x$ 上にあるための条件は, b, c によらない条件であることを示せ。

〔 5 〕 (配点 50 点)

行列

$$A = \begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix}$$

について、以下の問いに答えよ。

(1) 方程式

$$\begin{cases} 15x + 6y = \lambda x \\ 6x + 10y = \lambda y \end{cases}$$

が $x = y = 0$ 以外の解をもつときの λ の値を 2 つ求めよ。

(2) (1) で求めた λ の 2 つの値を $\alpha, \beta (\alpha > \beta)$ とするとき、

$$AT = T \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

を満たし、逆行列をもつ行列 T を 1 つ求め、その逆行列 T^{-1} を求めよ。

(3) A^n を求めよ。

(4) $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ を $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ でない列ベクトルとし、

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

とする。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{x_n}$$

を求めよ。ただし、 $x_n \neq 0$ ($n = 1, 2, \dots$) と仮定する。