

〔 1 〕 (配点 50 点)

$f(x) = xe^x$ とおく。また p を $p \geq 0$ を満たす数とし、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $P(p, f(p))$ における接線の方程式を $y = g(x)$ とおく。ただし、 e は自然対数の底である。

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $x \geq 0$ において $f(x) \geq g(x)$ が成り立つことを示せ。
- (2) L を正の数とする。曲線 $y = f(x)$ ，接線 $y = g(x)$ ，および 2 直線 $x = 0$ ， $x = L$ で囲まれた部分の面積を $S(p)$ とするとき、 $p \geq 0$ における $S(p)$ の最小値を与える p の値を求めよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

p を $0 < p < 1$ を満たす数とし, 行列 A, B, C をそれぞれ

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1+p \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1-p & 0 \end{pmatrix}$$

とおく。さらに, 行列 A_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) を $A_1 = A$, $A_{n+1} = A_n B - BA_n + C$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で定める。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) A_2, A_3 を求めよ。

(2) $A_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$, $\Delta_n = a_n d_n - b_n c_n$ とおくとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n$ を求めよ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

a, b を正の数とし, 空間内の 3 点 $A(a, -a, b)$, $B(-a, a, b)$, $C(a, a, -b)$ を考える。A, B, C を通る平面を α , 原点 O を中心とし A, B, C を通る球面を S とおく。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 線分 AB の中点を D とするとき, $DC \perp AB$ および $DO \perp AB$ であることを示せ。また $\triangle ABC$ の面積を求めよ。
- (2) ベクトル DC と DO のなす角を θ とするとき $\sin \theta$ を求めよ。また, 平面 α に垂直で原点 O を通る直線と平面 α との交点を H とするとき, 線分 OH の長さを求めよ。
- (3) 点 P が球面 S 上を動くとき, 四面体 $ABCP$ の体積の最大値を求めよ。ただし, P は平面 α 上にはないものとする。

〔 4 〕 (配点 50 点)

さいころを 3 回続けて投げて出た目を順に a, b, c とする. これらの数 a, b, c に対して 2 次方程式

$$(*) \quad ax^2 + bx + c = 0$$

を考える. ただし, さいころはどの目も同様に確からしく出るものとする. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) 2 次方程式 $(*)$ が異なる二つの実数の解を持つとき, 積 ac の取りうる値を求め, 積 ac の各値ごとに可能な a と c の組 (a, c) がそれぞれ何通りあるかを求めよ.
- (2) 2 次方程式 $(*)$ が異なる二つの有理数の解をもつ確率を求めよ. ただし, 一般に自然数 n が自然数の 2 乗でなければ $\sqrt{n}$ は無理数であることを用いてよい.

〔 5 〕 (配点 50 点)

関数 $f(x)$ が 0 でない定数 p に対して, つねに $f(x+p) = f(x)$ を満たすとき $f(x)$ は周期関数であるといい, p を周期という. 正の周期のうちで最小のものを特に基本周期という. たとえば, 関数 $\sin x$ の基本周期は 2π である. このとき, 次の問いに答えよ.

- (1) $y = |\sin x|$ のグラフをかき, 関数 $|\sin x|$ の基本周期を求めよ.
- (2) 自然数 m, n に対して関数 $f(x)$ を $f(x) = |\sin mx| \sin nx$ とおく. p が関数 $f(x)$ の周期ならば $f\left(\frac{p}{2}\right) = f\left(-\frac{p}{2}\right) = 0$ が成り立つことを示せ. また, このとき mp は π の整数倍であり, np は 2π の整数倍であることを示せ.
- (3) m, n は 1 以外の公約数をもたない自然数とする. (2) の結果を用いて関数 $|\sin mx| \sin nx$ の基本周期を求めよ.