〔 **1** 〕 (配点 50 点)

$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ とおく。ただし，e は自然対数の底とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ の増減，凹凸，漸近線を調べ，グラフをかけ。

(2) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(3)

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right)-f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}$$

を求めよ。

〔 **2** 〕 (配点 50 点)

1 から 10 までの番号が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある。k を 2 から 9 までの整数の 1 つとする。よくきった 10 枚のカードから 1 枚を抜き取り，そのカードの番号が k より大きいなら，抜き取ったカードの番号を得点とする。抜き取ったカードの番号が k 以下なら，そのカードを戻さずに，残りの 9 枚の中から 1 枚を抜き取り，2 回目に抜き取ったカードの番号を得点とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 得点が 1 である確率と 10 である確率をそれぞれ求めよ。
(2) 2 以上 9 以下の整数 n に対して，得点が n である確率を求めよ。
(3) 得点の期待値を求めよ。

〔 **3** 〕 (配点 50 点)

$\triangle$ OAB において，辺 AB 上に点 Q をとり，直線 OQ 上に点 P をとる．ただし、点 P は点 Q に関して点 O と反対側にあるとする．3 つの三角形 $\triangle$ OAP，$\triangle$ OBP，$\triangle$ ABP の面積をそれぞれ a，b，c とする．このとき，次の問いに答えよ．

(1) $\overrightarrow{OQ}$ を $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ および a、b を用いて表せ．

(2) $\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ および a、b、c を用いて表せ．

(3) 3 辺 OA，OB，AB の長さはそれぞれ 3，5，6 であるとする．点 P を中心とし，3 直線 OA，OB，AB に接する円が存在するとき，$\overrightarrow{OP}$ を $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ．

〔 **4** 〕 (配点 50 点)

$a > 0$ に対して，$f(x) = a + \log x \ (x > 0)$，$g(x) = \sqrt{x-1} \ (x \geqq 1)$ とおく。2 曲線 $y = f(x)$，$y = g(x)$ が，ある点 P を共有し，その点で共通の接線 l を持つとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) a の値，点 P の座標，および接線 l の方程式を求めよ。

(2) 2 曲線は点 P 以外の共有点を持たないことを示せ。

(3) 2 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

〔 **5** 〕 (配点 50 点)

いくつかの半径 3 の円を，半径 2 の円 Q に外接し，かつ，互いに交わらないように配置する．このとき，次の問いに答えよ．

(1) 半径 3 の円の 1 つを R とする．円 Q の中心を端点とし，円 R に接する 2 本の半直線のなす角を θ とおく．ただし，$0 < \theta < \pi$ とする．このとき，$\sin\theta$ を求めよ．

(2) $\dfrac{\pi}{3} < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ を示せ．

(3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を求めよ．