

〔 1 〕 (配点 50 点)

n を自然数とする。 $x \geq 0$ において定義された関数

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^1 \left(\log \frac{1}{t} \right)^n dt$$

について、以下の問いに答えよ。なお、必要ならば、任意の整数 m について

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^m e^{-x} = 0$$

が成り立つことを用いてよい。

- (1) $f_n(x)$ の導関数 $\frac{df_n(x)}{dx}$ を求めよ。
- (2) 関数 $f_1(x)$ を求めよ。
- (3) $n > 1$ のときの $f_n(x)$ と $f_{n-1}(x)$ の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (4) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x)$ を n を用いて表せ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

a, b は実数 (ただし, $b \neq 0$) で, $A = \begin{pmatrix} a & \sqrt{3}b \\ \sqrt{3}b & a+2b \end{pmatrix}$ とする。また, 数列 $\{\alpha_n\}, \{\beta_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次式により定める。

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} \\ \beta_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

以下の問いに答えよ。

(1) 次の関係式を満たす実数 p, q, v, w を求めよ。

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} 1 \\ v \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} 1 \\ w \end{pmatrix}$$

ただし, $p \neq q, v < w$ とする。

(2) (1) で求めた v, w から, 行列 P を次のように定める。

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ v & w \end{pmatrix}$$

このとき, 行列 $B = P^{-1}AP$ を求めよ。

(3) (2) で定めた P を用いて, 数列 $\{s_n\}, \{t_n\}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を次式より定める。

$$\begin{pmatrix} s_n \\ t_n \end{pmatrix} = P^{-1} \begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ のとき, 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} s_n, \sum_{n=1}^{\infty} t_n$ がともに収束するための a, b が満たすべき条件を求めよ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

原点とする xyz 空間内の点 A, B, C をそれぞれ $A(-1, 2, 3)$, $B(0, 1, 2)$, $C(0, 1, 0)$ とし, 2 点 A, B を通る直線を l とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 点 P は直線 l 上を動き, 点 Q は y 軸上を動くものとする. このとき, 2 点 P と Q との距離の最小値を求めよ. また, P と Q との距離が最小となるときの P と Q をそれぞれ P_0, Q_0 とする. P_0 と Q_0 の座標を求めよ.
- (2) P_0 との距離が s であるような直線 l 上の点の一つを S とする. 点 S から三角形 P_0Q_0C を含む平面に下ろした垂線とその平面との交点を R とするとき, 線分 SR の長さを求めよ.
- (3) y 軸上に長さ k の線分 DE があり, 直線 l 上に長さ m の線分 FG がある. 四面体 $DEFG$ の体積を求めよ.

〔 4 〕 (配点 50 点)

点 Q は次の規則で数直線上の非負整数の上を正の方向へ動くものとする.
ただし n は非負整数とする.

- (a) 時刻 0 では点 Q は原点にある.
- (b) 点 Q が時刻 T で座標 $2n$ にあるとき, 時刻 $T + 1$ には確率 $\frac{1}{2}$ で座標 $2n + 1$ へ移動し, 確率 $\frac{1}{2}$ で座標 $2n + 2$ へ移動する.
- (c) 点 Q が時刻 T で座標 $2n + 1$ にあるとき, 時刻 $T + 1$ には確率 1 で座標 $2n + 2$ へ移動する.

点 Q が時刻 T で座標 j にある確率を $P(T, j)$ と書くことにする. 以下の問いに答えよ.

- (1) すべての自然数 j に対して $P(2, j)$ を求めよ.
- (2) T, j が自然数であるとき, $P(T, j) = 0$ となる条件を T, j を用いて表せ.
- (3) T が自然数であるとき $P(T, 2n)$ を求めよ.

〔 5 〕 (配点 50 点)

$f(x)$ を $x \geq 0$ で定義された連続な関数とし, a, b を正の定数とする. このとき,

$$f(x) \text{ が } x \geq 0 \text{ で}$$
$$0 \leq f(x) \leq a + b \int_0^x f(t) dt$$

の関係を満たすものとする. 以下の問いに答えよ.

(1) $g(x) = \int_0^x f(t) dt$ とするとき,

$$\frac{d}{dx}[g(x)e^{-bx}] \leq ae^{-bx}$$

が成立することを示せ.

(2) $f(x) \leq ae^{bx}$ が成立することを示せ.

(3) $F(x)$ は x について連続な関数で, 任意の二つの実数 α, β に対して, 次の関係を満たすものとする.

$$|F(\alpha) - F(\beta)| \leq |\alpha - \beta|$$

さらに, $x \geq 0$ で定義された二つの連続な関数 $y(x)$ と $z(x)$ は次の関係式を満たすものとする.

$$y(x) = \int_0^x F(y(t)) dt, \quad z(x) = \int_0^x F(z(t)) dt$$

このとき, $h(x) = |y(x) - z(x)|$ とおけば,

$$h(x) \leq \int_0^x h(t) dt$$

が成立することを示せ.

(4) $x \geq 0$ で $y(x) = z(x)$ であることを証明せよ.