

〔 1 〕 (配点 50 点)

直線 $y = ax$ (ただし a は正の実数) を l とし, 曲線 $y = f(x)$ (ただし $x \geq 0$) を C とする。曲線 C が直線 l の下側にあり, 曲線 C 上の点 $(t, f(t))$ と直線 l との距離が at^2 で表されるとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $f(x)$ を求めよ。
- (2) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形を, x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。
- (3) V が最大となるように a の値を定めよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

鋭角三角形 ABC において, $\vec{a} = \overrightarrow{CA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{CB}$ とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) 線分 AC を $1:2$ に内分する点を P , 線分 BC を $2:3$ に内分する点を Q とする. ここで線分 AC の長さを $|AC|$ で表すとして, $|AC| = 12$ および $|BC| = 5\sqrt{5}$ とする. このとき, $|AQ| > |BP|$ であることを示せ.
- (2) n を正の整数, r を $0 < r < 1$ をみたす実数とする. 線分 AC を $1-r:r$ に内分する点を E , 線分 BC を $1-r^n:r^n$ に内分する点を F とし, 線分 AF と線分 BE の交点を R とする. $\overrightarrow{CR}$ を $\vec{a}, \vec{b}, n, r$ を用いて表せ.
- (3) (2) において, n を固定して $r \rightarrow 1$ としたとき, 交点 R は辺 AB 上のある点 S に近づく. このとき, $|AS|:|SB|$ を求めよ.

〔 3 〕 (配点 50 点)

点 $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ が, 行列を用いて次のように与えられている。

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 \\ \frac{4}{9} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}, \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

以下の問いに答えよ。

(1) $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ のときの $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ を P_n とする。点 P_n の座標を求めよ。

(2) $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ のときの $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ を Q_n とする。点 Q_n の座標を求めよ。

(3) $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ 0 \end{pmatrix}$ (ただし k は正の実数) のときの $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ を R_n とする。点 R_n の座標を求めよ。

(4) 点 R_n と点 R_{n-1} の間の距離を $|R_n R_{n-1}|$ とする。

$$\sum_{n=1}^{\infty} |R_n R_{n-1}|$$

を求めよ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

表と裏の出る確率が $\frac{1}{2}$ ずつの硬貨を投げ、表なら 1 点、裏なら 0 点とする． k, n を正の整数として、以下の問いに答えよ．

- (1) 硬貨を繰り返し投げ、得点の合計が 3 点に達したら終了することにする．ちょうど 5 回目で終了する確率はいくらか．また、ちょうど n 回目で終了する確率を q_n とするとき、 $\sum_{i=1}^n q_i = 1 - \frac{n^2 + n + 2}{2^{n+1}}$ を証明せよ．
- (2) 硬貨を繰り返し投げ、得点の合計が k 点に達したら終了することにする．ちょうど n 回目で終了する確率を $p_k(n)$ とする． k を固定したまま n を動かすときの $p_k(n)$ の最大値を求めよ．

〔 5 〕 (配点 50 点)

n, N を正の整数とする. 以下の問いに答えよ.

- (1) k を正の定数とし, 関数 $f(x)$ は $f(x) = f(x+k)$ をみたすとする. このとき,

$$T_n = \int_{k(n-1)}^{kn} e^{-x} f(x) dx, \quad S_N = \sum_{n=1}^N T_n$$

とおく. T_n と S_N を T_1 で表せ.

- (2) (1) において $f(x) \geq 0$ とする. このとき, k 以上の実数 z に対して

$$S_n \leq \int_0^z e^{-x} f(x) dx < S_{N+1}$$

が成立するような N を求めよ. さらに, この不等式を用いて極限

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \int_0^z e^{-x} f(x) dx$$

が存在することを示し, この極限を T_1 で表せ.

- (3) $h(x) = e^{-x} |\cos \pi x|$ とする. $y = h(x)$, x 軸, y 軸および $x = z$ で囲まれた部分の面積を $V(z)$ とおく. $\lim_{z \rightarrow \infty} V(z)$ を求めよ.