

〔 1 〕 (配点 50 点)

$a > 0, b > 0, 0 < \alpha < 1, 0 < \beta < 1$ として、以下の問いに答えよ。

(1) 初項 $a_1 = a$ と漸化式

$$a_{n+1} = \alpha a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義された数列 $\{a_n\}$ がある。このとき、

$$x_n = \log_{10} a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定まる数列 $\{x_n\}$ の一般項を n, α, a を用いて表せ。

(2) 初項 $b_1 = b$ と漸化式

$$b_{n+1} = \beta b_n^2 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定義された数列 $\{b_n\}$ がある。このとき、

$$y_n = \log_{10} b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

により定まる数列 $\{y_n\}$ の一般項を n, β, b を用いて表せ。

(3) $a = b = 1$ のとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{y_{n+1}} = 0$$

を証明せよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

以下の問いに答えよ。

- (1) 原点のまわりの角 θ の回転移動を表す行列を R_θ とする。回転 R_θ によって点 $(2, 1)$ に移される点 (a, b) を求めよ。
- (2) 原点を通り、傾き $\tan \theta$ $\left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ の直線を l とする。また、点 $P(x, y)$ を直線 l に関して対称移動した点を $P'(x', y')$ とする。このとき、 x' と y' を x, y および θ を用いて表し、この移動を表す行列 A_θ を求めよ。
- (3) x 軸に関する対称移動を表す行列を B とする。このとき、 $R_\theta B R_\theta^{-1} = A_\theta$ となることを示せ。
- (4) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, $0 < \gamma < \frac{\pi}{2}$ とする。2つの行列の積 $A_\alpha A_\beta$ はある角の回転移動を表すことを示せ。また3つの行列の積 $A_\alpha A_\beta A_\gamma$ によって表される移動は決して回転移動を表さないことを示せ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

座標平面上の楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > b > 0$) について、以下の問いに答えよ。

- (1) x 座標が小さい方の焦点 F を極とし、 F から x 軸の正の方向へ向かう半直線を始線とする極座標 (r, θ) で表された楕円の極方程式 $r = f(\theta)$ を求めよ。
- (2) 座標平面上の原点 $O(0, 0)$ と楕円上の 2 点 P_1, P_2 について、線分 OP_1 と線分 OP_2 とが互いに直交する位置にあるとする。線分 OP_1 および OP_2 の長さをそれぞれ r_1, r_2 とするとき、 $\frac{1}{r_1^2} + \frac{1}{r_2^2}$ の値は定数となることを示せ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

関数 $f(x) = -x \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) について, 以下の問いに答えよ。

- (1) $0 < x < \pi$ の範囲で, 方程式 $f''(x) = 0$ がただ 1 つの解 $x = a$ をもつことを示せ。
- (2) 上の (1) で存在が示された a に対して, $a < x < \pi$ の範囲で, 方程式 $f'(x) = -1$ がただ 1 つの解 $x = b$ をもつことを示し, その値 b を求めよ。また, 曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(b, f(b))$ における法線 m の方程式を求めよ。
- (3) 上の (2) で求めた法線 m と曲線 $y = f(x)$ および y 軸とで囲まれた図形を, x 軸のまわりに回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

〔 5 〕 (配点 50 点)

50 円と 100 円の硬貨が 3 枚ずつの計 6 枚と、さいころが 1 個ある。これらの硬貨 6 枚とさいころ 1 個を同時に投げて、表が出た硬貨の合計額にさいころの目の数 n から 2 を引いた数の絶対値 $|n - 2|$ をかけ合わせた賞金をもらえるものとする。たとえば、硬貨 6 枚すべてが表となり、さいころの目が 6 となった場合、表が出た硬貨の合計額 450 円を 4 倍した 1800 円を賞金としてもらえる。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 賞金を全くもらえない確率を求めよ。
- (2) もらえる賞金が 500 円以上となる確率を求めよ。
- (3) もらえる賞金の期待値を求めよ。