

〔 1 〕 (配点 50 点)

以下の問いに答えよ。

- (1) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, $\sin x - x \leq 0$ が成り立つことを示せ。
- (2) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ のとき, $\sin x - x + ax^3 \geq 0$ が成り立つような正の数 a を 1 つ定めよ。
- (3) $0 < |x| \leq \frac{\pi}{2}$ のとき,

$$\left| \frac{\sin x}{x} - 1 \right| \leq ax^2$$

が成り立つことを示せ。ただし, a は (2) で定めた値とする。

- (4) 曲線 $y = \sin x$ と直線 $y = x$ および $x = \frac{\pi}{2}$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

0 を原点とする座標空間において, 3 点 $A(a, 0, 0)$ 、 $B(0, a, 0)$ 、 $C(0, 0, 1)$ が定める平面を α とする。ただし, a は正の定数とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 平面 α 上の任意の点 P に対し, $CP = sCA + tCB$ を満たす実数 s 、 t が存在する。点 P の座標を a 、 s 、 t を用いて表せ。
- (2) 原点 O から平面 α に垂線 OH を下ろす。点 H の座標を a を用いて表せ。
- (3) $a = 1$ とする。平面 α 上で点 A を中心とする半径 1 の円を考え, その円周上に点 Q を $\angle QAB = \theta$ となるように取る。ただし, $0 < \theta < \pi$ とし, 点 Q の z 座標は正とする。点 Q の座標を θ を用いて表せ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

2 個のサイコロを投げて、 xy 平面上の点 P を移動させる次の試行を考える。

試行：2 個のサイコロを同時に投げて、大きい目の数を X 、小さい目の数を Y とする。ただし、同じ目が出た場合は、 X 、 Y の両者をその目の数とする。このとき、

- X が 3 以上なら、点 P を x 軸の正の方向に 1 動かし、
- Y が 3 以上なら、点 P をさらに y 軸の正の方向に 1 動かす。

この試行を繰り返して点 P を原点 $(0, 0)$ から順に動かしていくとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 1 回目の試行終了時に点 P が $(1, 0)$ に移動している確率を求めよ。
- (2) 2 回目の試行終了時に点 P が $(1, 1)$ に移動している確率を求めよ。
- (3) n 回目の試行終了時に点 P が $(n, n - 1)$ に移動している確率を求めよ。ただし、 n は自然数である。

〔 4 〕 (配点 50 点)

数列 $\{a_n\}$ を次式で定義する。

$$a_n = \int_c^1 nx^{n-1} \left(\log \left(\frac{1}{x} \right) \right)^n dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ただし, c は $0 < c < 1$ を満たす定数とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 および第 2 項 a_2 を求めよ。
- (2) $0 < x \leq 1$ のとき, $0 \leq x \log \left(\frac{1}{x} \right) < \frac{1}{2}$ が成り立つことを示せ。
- (3) $a_n < \frac{n}{2^n} \log \left(\frac{1}{c} \right)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が成り立つことを示せ。
- (4) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ を示せ。

〔 5 〕 (配点 50 点)

数直線上に 2 点 X_1 、 X_2 を取り、それぞれの座標を a_1 および a_2 とする。ただし、 $0 < a_1 < a_2$ とする。線分 X_1X_2 を $s : 1 - s$ に内分する点を X_3 、線分 X_2X_3 を $s : 1 - s$ に内分する点を X_4 、同様に自然数 k に対して線分 X_kX_{k+1} を $s : 1 - s$ に内分する点を X_{k+2} とする。ただし、 $0 < s < 1$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 2 点 X_{2n-1} 、 X_{2n} の座標を並べてベクトル $\begin{pmatrix} a_{2n-1} \\ a_{2n} \end{pmatrix}$ で表し、

$$\begin{pmatrix} a_{2n+1} \\ a_{2n+2} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} a_{2n-1} \\ a_{2n} \end{pmatrix}$$

と書くとき、行列 A を s を用いて表せ。ただし、 n は自然数である。

- (2) 行列 P を

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ s-1 & 1 \end{pmatrix}$$

とし、行列 B を $B = P^{-1}AP$ とする。行列 B を求めよ。

- (3) 座標 a_{2n+1} および a_{2n+2} を n 、 s 、 a_1 、 a_2 を用いて表せ。

- (4) 点 X_k の座標 a_k の極限 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_k$ を求めよ。