〔 **1** 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙$\boxed{15}$の定められた場所に記入しなさい。

【問題】

$a>1$ とし，2 つの曲線

$$y=\sqrt{x}\quad (x \geqq 0)\ ,\ y=\frac{a^3}{x}\quad (x>0)$$

を順に C_1, C_2 とする。また，C_1 と C_2 の交点 P における C_1 の接線を l_1 とする。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C_1 と y 軸および直線 l_1 で囲まれた部分の面積を a を用いて表せ。

(2) 点 P における C_2 の接線と直線 l_1 のなす角を $\theta(a)$ とする $(0<\theta(a)<\frac{\pi}{2})$。このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} a\sin\theta(a)$ を求めよ。

〔 **2** 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙$\boxed{16}$の定められた場所に記入しなさい。

【問題】

一辺の長さが 1 の正方形 OABC を底面とし，点 P を頂点とする四角錐 POABC がある。ただし，点 P は内積に関する条件 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = \dfrac{1}{4}$, および $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OP} = \dfrac{1}{2}$ をみたす。辺 AP を 2：1 に内分する点を M とし，辺 CP の中点を N とする。さらに，点 P と直線 BC 上の点 Q を通る直線 PQ は，平面 OMN に垂直であるとする。このとき，長さの比 BQ：QC，および線分 OP の長さを求めよ。

〔 **3** 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙$\boxed{17}$の定められた場所に記入しなさい。

【問題】

横一列に並んだ 6 枚の硬貨に対して，以下の操作 L と操作 R を考える。

L：さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。R：さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば，表表裏表裏表 と並んだ状態で操作 L を行うときに，3 の目が出た場合は，裏裏表表裏表 となる。以下,「最初の状態」とは硬貨が 6 枚とも表であることとする。

(1) 最初の状態から操作 L を 2 回続けて行うとき，表が 1 枚となる確率を求めよ。

(2) 最初の状態から L，R の順に操作を行うとき，表の枚数の期待値を求めよ。

(3) 最初の状態から L，R，L の順に操作を行うとき，すべての硬貨が表となる確率を求めよ。

〔 **4** 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 $\boxed{18}$ の定められた場所に記入しなさい。

【問題】

原点 O を中心とし、点 A(0,1) を通る円を S とする。点 B $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で円 S に内接する円 T が、点 C で y 軸に接しているとき、以下の問いに答えよ。

(1) 円 T の中心 D の座標と半径を求めよ。

(2) 点 D を通り x 軸に平行な直線を l とする。円 S の短い方の弧 AB、円 T の短い方の弧 BC、および線分 AC で囲まれた図形を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

〔 **5** 〕 (配点 50 点)

実数 x, y, t に対して，行列

$$A = \begin{pmatrix} x & y \\ -t-x & -x \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ -6 & -5 \end{pmatrix}$$

を考える。（AB）^{2} が対角行列，すなわち $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ の形の行列であるとする。

(1) 命題「$3x-3y-2t \neq 0 \Longrightarrow A = tB$」を証明せよ。
以下 (2), (3), (4) では，さらに $A^2 \neq E$ かつ $A^4 = E$ であるとする。ただし，E は単位行列を表す。

(2) 3x - 3y - 2t $=$ 0 を示せ。

(3) x と y をそれぞれ t の式で表せ。

(4) x, y, t が整数のとき，行列 A を求めよ。