

〔 1 〕 (配点 50 点)

O を原点とする xyz 空間内の点 A, B, C の座標をそれぞれ $(0, 1, 0)$, $(0, -2, 0)$, $\left(\frac{3}{2}\sqrt{3}, -\frac{1}{2}, 0\right)$ とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 点 A, B, C, D が正四面体の頂点となるとき、点 D の座標を求めよ。
ただし、点 D の z 座標は正とする。
- (2) (1) で定めた点 D に対して、線分 CD を 2:1 に内分する点を E, 線分 AD を 2:1 に内分する点を F とする。このとき、三角形 OEF の面積を求めよ。
- (3) (2) で定めた点 E, F に対して、点 O, E, F を通る平面が、点 O, E, F 以外で正四面体 ABCD の辺と交わる点の座標を求めよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

原点を出発し，数直線上を動く点 P がある。このとき，次の試行 T を考える。

(試行 T) P は，1 枚の硬貨を投げて表が出たら正の向きに 1 だけ移動し，裏が出たら負の向きに 1 だけ移動する。移動後に， P が原点にあるとき，あるいは原点からの距離が 3, 6, 9 の位置にあるときには，白玉を 1 個もらう。

この試行 T を 10 回繰り返すとき，以下の問いに答えよ。

- (1) 10 回目の試行で初めて白玉をもらう確率を求めよ。
- (2) 2 回目の試行で初めて白玉をもらい，かつ，その後は白玉をもらわない確率を求めよ。
- (3) もらう白玉の総数が 1 個である確率を求めよ。
- (4) もらう白玉の総数が 2 個である確率を求めよ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次式により定める。

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) すべての n に対して、 xy 平面上の点 (a_n, b_n) が双曲線 $x^2 - 2y^2 = 4$ の上にあることを証明せよ。
- (2) r, s, t は正の実数とし、行列 $A = \begin{pmatrix} r & -r \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ が次の関係式を満たすとする。

$$A^{-1} \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$

このとき、 r, s, t を求めよ。

- (3) 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

α を $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ を満たす実数とし, 数列 $\{\theta_n\}$ を次式により定める。

$$\theta_1 = 0, \quad \theta_{n+1} = \begin{cases} \theta_n + \alpha & (\theta_n \leq \frac{\pi}{2} \text{ のとき}) \\ \theta_n - \alpha & (\theta_n > \frac{\pi}{2} \text{ のとき}) \end{cases} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

さらに数列 $\{x_n\}$ を次式により定める。

$$x_1 = 0, \quad x_{n+1} = x_n + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \sin \theta_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) x_3 が最大となる α を求めよ。
- (2) $\alpha = \frac{\pi}{4}$ のとき, 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ を求めよ。
- (3) 極限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ が最大となる α と, その極限値を求めよ。

〔 5 〕 (配点 50 点)

○を原点とする xy 平面上の曲線 $y = e^{-x}|\sin x|$ ($x \geq 0$) を C とする。
このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対し, $(n-1)\pi \leq x \leq n\pi$ の範囲で y が最大となる
曲線 C 上の点を P_n とする。このとき, 点 P_n の座標を求めよ。
- (2) 点 P_n から x 軸に下ろした垂線を P_nH_n とし, 三角形 OP_nH_n の面積
を S_n とするとき, 無限級数

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_n$$

の和を求めよ。

- (3) 曲線 C と線分 OP_1 で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してでき
る回転体の体積を求めよ。