

〔 1 〕 (配点 50 点)

行列 $A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ について以下の問いに答えよ。

(1) a, b, c, d を実数とする。行列 $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ が $AT = TB$ かつ $ad - bc = 1$ を満たすとき, b, c, d をそれぞれ a を用いて表せ。

(2) xy 平面内の点 $P_n(\alpha_n, \beta_n)$ を

$$\begin{pmatrix} \alpha_n \\ \beta_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \alpha_{n-1} \\ \beta_{n-1} \end{pmatrix}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

で定める。ただし, $\alpha_0 = 1, \beta_0 = 0$ とする。このとき α_n および β_n を求めよ。また, 点 P_n を通り, $y = x$ で与えられる直線 l と直交する直線 m の方程式を求めよ。

(3) 直線 l と直線 m の交点を Q_n とし, P_n と Q_n の距離を d_n とする。このとき

$\lim_{n \rightarrow \infty} d_n$ を求めよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

箱の中に、赤玉が 5 個、青玉が 4 個、白玉が 3 個入っている。それぞれの玉の大きさは同じで、1 個あたりの重さは、赤玉が 100g、青玉が 45g、白玉が 30g である。このとき以下の問いに答えよ。ただし、取り出した玉は重さを量ったあとで、箱の中にもどすものとする。

- (1) 無作為に箱から玉を 1 個取り出して空の袋に入れ、重さを量ったとする。このとき袋の中身の重さが 40g 以上であるという条件のもとで、袋の中身が赤玉である確率を求めよ。
- (2) 無作為に箱から玉を 2 個取り出して空の袋に入れ、重さを量ったとする。このとき袋の中身の重さが 100g 以上であるという条件のもとで、袋の中身が 2 個とも赤玉である確率を求めよ。
- (3) 無作為に箱から玉を 3 個取り出して空の袋に入れ、重さを量ったとする。このとき袋の中身の重さが 150g 以上であるという条件のもとで、袋の中身が 3 個とも赤玉である確率を求めよ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

a を正の定数, 関数 $f(x)$, $g(x)$ をそれぞれ $f(x) = xe^x$, $g(x) = ax$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) $y = f(x)$ と $y = g(x)$ のグラフが $0 < x < 1$ の範囲において交点を持つための a の範囲を求めよ。
- (2) $h(a) = \int_0^1 |f(x) - g(x)| dx$ とおく。 $h(a)$ を最小にする a の値を求めよ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

xy 平面において半径 r の円を考える。この円の中心 O は、時刻 $t = 0$ において点 $(0, r)$ にあり、一定の速さ ar (ただし $a > 0$) で x 軸の正の方向に移動する。同時に、この円は中心 O のまわりを単位時間当たり 1 ラジアン割合で時計まわりに連続的に回転する。時刻 $t = 0$ において原点 $(0, 0)$ にあった円周上の定点 P の時刻 t における座標を $(x(t), y(t))$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P の座標 $(x(t), y(t))$ を a, r, t を用いて表せ。
- (2) $0 \leq t \leq 2\pi$ のとき、以下の (i), (ii) それぞれの場合について、点 P の軌跡 C の概形を図示し、 $x(t), y(t)$ の最大値と最小値、および C と x 軸との共有点の x 座標を求め、図の中に記入せよ。
 - (i) $a = 1$
 - (ii) $a = \frac{1}{2}$
- (3) $a = \frac{1}{2}$ の場合について、 C と x 軸によって囲まれる領域の面積を求めよ。

〔 5 〕 (配点 50 点)

すべての実数 x について、関数 $f(x)$ およびその導関数 $f'(x)$ が微分可能であり、 $f'(x) > 0$ かつ $f''(x) > 0$ が満たされるとする。また、 $f(-2) < 0$ かつ $f(2) > 0$ であるとし、 $f(x) = 0$ の解を a とする。 $f(x)$ を用いて、数列 $\{x_n\}$ を次のように定義する。

- $x_1 = 2$
- x_n ($n = 2, 3, 4, \dots$) は、曲線 $y = f(x)$ の $x = x_{n-1}$ における接線と x 軸との交点の x 座標とする。

このとき以下の問いに答えよ。

- (1) $x_n > a$ ならば以下の不等式が成り立つことを平均値の定理を用いて示せ。

$$f'(a) < \frac{f'(x_n)(x_n - x_{n+1})}{x_n - a} < f'(x_n)$$

- (2) $x_n > a$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であることを数学的帰納法を用いて示せ。

- (3) 次の不等式を示せ。

$$\frac{x_{n+1} - a}{x_n - a} < 1 - \frac{f'(a)}{f'(x_n)} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (4)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

となることを示せ。