

〔 1 〕 (配点 50 点)

座標空間における直方体 $ABCD - EFGH$ において, 点 A, B, C, D の座標をそれぞれ $(0, 0, 2), (2, 0, 2), (2, 4, 2), (0, 4, 2)$, 点 E, F, G, H の座標をそれぞれ $(0, 0, 0), (2, 0, 0), (2, 4, 0), (0, 4, 0)$ とする。また, 線分 AD を $s : (1 - s)$ に内分する点を I , 線分 FG を $t : (1 - t)$ に内分する点を J とする。ただし, $0 < s < 1, 0 < t < 1$ である。このとき, 以下の問いに答えよ。

- (1) 線分 AJ と平面 BEI の交点を P とし, ベクトル $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$ をそれぞれ $\vec{b}, \vec{d}, \vec{e}$ としたとき, ベクトル $\overrightarrow{AP}$ を $\vec{b}, \vec{d}, \vec{e}, s, t$ で表せ。
- (2) 平面 BEI に対して垂直なベクトルを求めよ。ただし, その x 成分は 1 とする。
- (3) ベクトル $\overrightarrow{AP}$ が平面 BEI に対して垂直となるとき, s を t で表せ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

チーム A と B が複数回試合を行って優勝チームを決めるものとする。ただし、いずれの試合においても、引き分けはないものとし、チーム A が勝つ確率は q ($0 < q < 1$) であり、各試合の勝敗は互いに独立に決まるとする。このとき、次の 2 種類のルールを考える。

ルール 1： 最大 3 回試合を行い、先に 2 勝したチームを優勝とする。

ルール 2： どちらか一方が 2 連勝するまで試合を繰り返し、2 連勝したチームを優勝とする。

以下の問いに答えよ。

- (1) ルール 1 を採用した場合に、チーム A が優勝する確率 $P_1(q)$ を q で表せ。
- (2) ルール 2 を採用した場合に、チーム A が優勝する確率 $P_2(q)$ を q で表せ。
- (3) $P_1(q) \geq P_2(q)$ となる条件を求めよ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

x, y を 0 以上 1 以下の実数とする。このとき、以下の問いに答えよ。ただし、 a, b, c, d が実数のとき、 $\max(a, b)$ は a, b のうちの最大の数を表し、 $\max(a, b, c, d)$ は a, b, c, d のうちの最大の数を表す。

- (1) $\max(xy, 1 - xy)$ の最小値を求めよ。
- (2) $\max(xy, 1 - xy, x, y)$ の最小値を求めよ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

数列 $\{x_n\}$ の第 n 項を $x_n = r^{n-1}$ で定める。このとき、正の実数 x に対して定義された関数 $f(x) = x^{-\alpha}$ を用いて、2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ を、それぞれ

$$a_n = f(x_n)(x_{n+1} - x_n), \quad b_n = f(x_{n+1})(x_{n+1} - x_n)$$

で定める。ただし、 α は正の定数、 r は 1 より大きい実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) α の値に応じて級数 $a(r) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ の収束、発散を調べ、収束するとき

きは和を求めよ。

(2) α の値に応じて級数 $b(r) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ の収束、発散を調べ、収束するとき

は和を求めよ。

(3) 極限 $\lim_{r \rightarrow 1+0} a(r)$ と $\lim_{r \rightarrow 1+0} b(r)$ のそれぞれについて、極限が有限な値である場合、その値を求めよ。

〔 5 〕 (配点 50 点)

座標平面上の直線 $l: y = -1$ と点 $F(0, 2)$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 直線 l 上を動く点を D とする。点 P を、線分 DP と線分 FP の長さが等しく、かつ線分 DP が y 軸と平行となるように定める。このとき、点 P の軌跡 C を求めよ。
- (2) a を実数とする。点 F を通り、傾きが a の直線 $m: y = ax + 2$ を考える。直線 m と軌跡 C の交点が 2 つあることを示し、それぞれの座標を求めよ。ただし、2 つの交点を A, B とし、点 A の x 座標が点 B の x 座標より小さいとする。
- (3) 点 A, B における軌跡 C の接線をそれぞれ l_A, l_B とする。接線 l_A, l_B は互いに垂直であることを示せ。
- (4) 接線 l_A, l_B の交点を通り、 y 軸に平行な直線を n とする。直線 n は線分 AB と、点 A, B とは異なる点で交わることを示せ。また、軌跡 C 、直線 m 、直線 n によって囲まれる図形のうち、直線 n の左側にある部分の面積を S_A とし、右側にある部分の面積を S_B とする。このとき、 S_A と S_B の比を求めよ。