〔１〕 (配点 50 点)

この問題の解答は，解答紙 $\boxed{22}$ の定められた場所に記入しなさい。

【問題】

座標平面において，x 軸上に 3 点 $(0,0)$、$(\alpha,0)$、$(\beta,0)$ $(0<\alpha<\beta)$ があり，曲線 $C: y=x^3+ax^2+bx$ が x 軸とこの 3 点で交わっているものとする。ただし，a、b は実数である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする。S を α と β の式で表せ。

(2) β の値を固定して，$0<\alpha<\beta$ の範囲で α を動かすとき，S を最小とする α を β の式で表せ。

〔 **2** 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 $\boxed{23}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

t を $0 < t < 1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において、辺 AB, BC, CA をそれぞれ 2 : 1, $t : 1-t$, 1 : 3 に内分する点を D, E, F とする。また、AE と BF, BF と CD, CD と AE の交点をそれぞれ P, Q, R とする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 3 直線 AE, BF, CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。
以下、t は $0 < t < t_0$ を満たすものとする。

(2) $AP = kAE$, $CR = \ell CD$ を満たす実数 k, ℓ をそれぞれ求めよ。

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ。

〔 **3** 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 $\boxed{24}$ の定められた場所に記入しなさい。

【問題】

袋の中に、赤玉が 15 個、青玉が 10 個、白玉が 5 個入っている。袋の中から玉を 1 個取り出し、取り出した玉の色に応じて、以下の操作で座標平面に置いたコインを動かすことを考える。

（操作）コインが点 (x, y) にあるものとする。赤玉を取り出したときにはコインを点 $(x+1, y)$ に移動、青玉を取り出したときには点 $(x, y+1)$ に移動、白玉を取り出したときには点 $(x-1, y-1)$ に移動し、取り出した球は袋に戻す。

最初に原点 $(0, 0)$ にコインを置き、この操作を繰り返して行う。指定した回数だけ操作を繰り返した後、コインが置かれている点を到達点と呼ぶことにする。このとき、以下の問いに答えよ。

(1) 操作を n 回繰り返したとき、白玉を 1 度だけ取り出したとする。このとき、到達点となり得る点をすべて求めよ。

(2) 操作を n 回繰り返したとき、到達点となり得る点の個数を求めよ。

(3) 座標平面上の 4 点 $(1, 1)$、$(-1, 1)$、$(-1, -1)$、$(1, -1)$ を頂点とする正方形 D を考える。操作を n 回繰り返したとき、到達点が D の内部または辺上にある確率を P_n とする。P_3 を求めよ。

(4) 自然数 N に対して P_{3N} を求めよ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 $\boxed{25}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

自然数 n に対して、10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2) $a_1, a_2, \cdots, a_6$ を求めよ。

(3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。

(i) N を十進法で表示したとき 6 桁となる。

(ii) N を十進法で表示して、最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。

(iii) N は 13 で割り切れる。