〔 **1** 〕 (配点 50 点)

等式 $(i-\sqrt{3})^m=(1+i)^n$ を満たす自然数 m, n のうち，m が最小となるときの m, n の値を求めよ。ただし，i は虚数単位である。

〔 **2** 〕 (配点 50 点)

箱の中に，白色の球が n 個，青色の球が n 個，赤色の球が n 個入っている。それぞれの色の球には 1 から n までの番号が重複なく書かれている。ただし $n = 1$ のときは，それぞれ番号 1 が書かれた白球，青球，赤球が 1 個ずつ入っているとする。箱から球を 1 個取り出して箱に戻すことを 3 回行う。以下の問いに答えよ。

(1) $n \geqq 3$ とする。取り出された球のうち少なくとも 1 個の番号が 3 であるとき，取り出された 3 個の球の番号の合計値が 9 である条件つき確率を求めよ。

(2) $n \geqq 1$ とする。取り出された球のうち少なくとも 1 個は 1 が書かれた赤玉であるとき，取り出された 3 個の球がすべて赤玉である条件つき確率 $p(n)$ を n の式で表せ。

(3) $n \geqq 1$ とする。(2) で求めた $p(n)$ の最小値を求めよ。

(4) $n \geqq 1$ とする。(2) で求めた $p(n)$ について，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} p(n)$ を求めよ。

〔 **3** 〕 (配点 50 点)

座標空間内に点 $A(-2,3,0)$，点 $B(2,-1,0)$，点 $C(2,3,4)$ がある。また，ベクトル $\overrightarrow{m}=(-1,1,3)$ に平行で点 $D(1,2,0)$ を通る直線 l，ベクトル $\overrightarrow{n}=(b,1,c)$ に垂直で点 $E(0,a,0)$ を通る平面 π がある。平面 π は直線 l を含んでいる。以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

(2) a と b をそれぞれ c の式で表せ。

(3) 平面 π が線分 AC と線分 BC の両方と共有点をもち，$\triangle ABC$ の面積を 2 等分するときの c の値を求めよ。

〔 **4** 〕 (配点 50 点)

正の実数 a，b に対して $A(a,b)=\dfrac{a+b}{2}$，$G(a,b)=\sqrt{ab}$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\min(a,b) \leqq G(a,b) \leqq A(a,b) \leqq \max(a,b)$ が成り立つことを示せ。ただし，$\min(a,b)$ は a,b のうち最小の数を表し，$\max(a,b)$ は a,b のうち最大の数を表す（$a=b$ の場合は a,b のうちのどちらかの数を表すとする)。

(2) $a>b$，$a_0=a$，$b_0=b$ として，以下の数列を定義する。

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n},\quad c_{n+1}=\frac{a_n-b_n}{2},\quad n=0,1,2,\ldots$$

このとき数列 $\{a_n\}$ と数列 $\{b_n\}$ は同じ極限値（α とする）に収束することを示せ。

(3) a_{n+2} を a_n と b_n を用いて表せ。ただし $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は (2) で定義した数列とする。

(4) $c_{n+2} \geqq c_{n+1}$ の間に以下の関係が成り立つことを示せ。ただし，$\{c_n\}$ と a はそれぞれ (2) で定義した数列と極限値とする。

$$c_{n+2}<\left(\frac{1}{2\sqrt{\alpha}}c_{n+1}\right)^2$$

〔 **5** 〕 (配点 50 点)

媒介変数 $x = \sin t,\ y = t^2$ (ただし $-2\pi \leqq t \leqq 2\pi$) で表された曲線で囲まれた領域の面積を求めよ。なお領域が複数ある場合は，その総和を求めよ。