〔 1 〕 (配点 50 点)

座標平面上の曲線 $C : y = \sqrt{x}\ (x \geqq 0)$ を考える。C 上の異なる 2 点 $P(p, \sqrt{p})$、$Q(q, \sqrt{q})\ (p > 0, q > 0)$ における、それぞれの法線 l_1, l_2 を考える。法線 l_1 と l_2 の交点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 R の座標を p と q で表せ。

(2) q が p に限りなく近づくとき、線分 RP の長さの極限値を p で表せ。

〔 **2** 〕 (配点 50 点)

1 個のさいころを 4 回投げ，1 回目に出た目の数を a，2 回目に出た目の数を b，3 回目に出た目の数を c，4 回目に出た目の数を d とする。d が，a と b と c の最大公約数の倍数となる確率を求めよ。

〔 **3** 〕 (配点 50 点)

座標空間内に点 $A(0,0,2)$，点 $B(2,0,0)$，点 $C(0,0,-2)$，点 $D(0,-2,0)$ がある。線分 AC を 1:3 に内分する点を E とし，線分 AD を 1:3 に内分する点を F とする。直線 BC と平面 $x=\dfrac{3}{2}$ の交点を G とする。直線 BD と平面 EFG の交点を H とする。

〔 **4** 〕 (配点 50 点)

k を $k \geqq 0$, $k \neq 1$ を満たす実数として，関数 $f(x)$ を

$$f(x) = \{1-(1-k)x\}^{\frac{1}{1-k}}$$

で定める。ただし，関数 $f(x)$ の定義域は，$0 \leqq k < 1$ のとき $0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{1-k}$ であり，$k > 1$ のとき $x \geqq 0$ である。以下の問いに答えよ。

(1) 導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2) $k = 0$ のとき，$0 < k < 1$ のとき，$1 < k$ のときのそれぞれの場合について，関数 $y = f(x)$ の増減，グラフの凹凸，座標軸との交点を調べてグラフをかけ。

(3) $x \geqq 0$ であるとき，

$$\lim_{k \to 1+0} \{1-(1-k)x\}^{\frac{1}{1-k}}$$

を求めよ。ここで，自然対数の底 e が $e = \displaystyle\lim_{h \to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}}$ を満たすことを用いてよい。

〔 **5** 〕 (配点 50 点)

次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

(1) 2 以上の自然数 n に対して，$a_{n+2} > 2a_n$ が成り立つことを示せ。

(2) 2 以上の自然数 m は，数列 $\{a_n\}$ の互いに異なる k 個 $(k \geqq 2)$ の項の和で表されることを，数学的帰納法によって示せ。

(3) (2) における項の個数 k は，$k < 2\log_2 m + 2$ を満たすことを示せ。