

〔 1 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 26 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

座標空間において、 xy 平面上にある双曲線 $x^2 - y^2 = 1$ のうち $x \geq 1$ を満たす部分を C とする。また、 z 軸上の点 $A(0, 0, 1)$ を考える。点 P が C 上を動くとき、直線 AP と平面 $x = d$ との交点の軌跡を求めよ。ただし、 d は正の定数とする。

〔 2 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 27 の定められた場所に記入しなさい。

【問題】

原点を中心とする半径 3 の半円 $C: x^2 + y^2 = 9 \ (y \geq 0)$ 上の 2 点 P と Q に対し、線分 PQ を $2:1$ に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。

- (1) 点 P の y 座標と Q の y 座標が等しく、かつ P の x 座標は Q の x 座標より小さくなるように P と Q が動くものとする。このとき、線分 PR が通過してできる図形 S の面積を求めよ。
- (2) 点 P を $(-3, 0)$ に固定する。 Q が半円 C 上を動くとき線分 PR が通過してできる図形 T の面積を求めよ。
- (3) (1) の図形 S から (2) の図形 T を除いた図形と第 1 象限の共通部分を U とする。 U を y 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を求めよ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 28 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

1 から 4 までの数字を 1 つずつ書いた 4 枚のカードが箱に入っている。箱の中から 1 枚カードを取り出してもとに戻す試行を n 回続けて行う。 k 回目に取り出したカードの数字を X_k とし、積 $X_1 X_2 \cdots X_n$ を 4 で割った余りが 0, 1, 2, 3 である確率をそれぞれ p_n, q_n, r_n, s_n とする。 p_n, q_n, r_n, s_n を求めよ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 29 の定められた場所に記入しなさい。

【問題】

整数 a, b は 3 の倍数ではないとし、

$$f(x) = 2x^3 + a^2x^2 + 2b^2x + 1$$

とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) $f(1)$ と $f(2)$ を 3 で割った余りをそれぞれ求めよ。
- (2) $f(x) = 0$ を満たす整数 x は存在しないことを示せ。
- (3) $f(x) = 0$ を満たす有理数 x が存在するような組 (a, b) をすべて求めよ。

〔 5 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 30 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

α を複素数とする。等式

$$\alpha(|z|^2 + 2) + i(2|\alpha|^2 + 1)\bar{z} = 0$$

を満たす複素数 z をすべて求めよ。ただし、 i は虚数単位である。