〔 **1** 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 $\boxed{27}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

n を自然数とする。x、y がすべての実数を動くとき、定積分

$$\int_0^1 \left(\sin(2n\pi t) - xt - y\right)^2 dt$$

の最小値を I_n とおく。極限 $\lim_{n\to\infty} I_n$ を求めよ。

〔 **2** 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 $\boxed{28}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

0 でない 2 つの整式 $f(x)$、$g(x)$ が以下の恒等式を満たすとする。

$$f(x^2) = (x^2 + 2)g(x) + 7$$

$$g(x^3) = x^4 f(x) - 3x^2 g(x) - 6x^2 - 2$$

以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の次数と $g(x)$ の次数はともに 2 以下であることを示せ。

(2) $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。

〔 **3** 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 $\boxed{29}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

1 個のサイコロを 3 回投げて出た目を順に a, b, c とする。2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0$$

の 2 つの解 z_1, z_2 を表す複素数平面上の点をそれぞれ $P_1(z_1), P_2(z_2)$ とする。また、複素数平面上の原点を O とする。以下の問いに答えよ。

(1) P_1 と P_2 が一致する確率を求めよ。

(2) P_1 と P_2 がともに単位円の周上にある確率を求めよ。

(3) P_1 と O を通る直線を l_1 とし、P_2 と O を通る直線を l_2 とする。l_1 と l_2 のなす鋭角が 60° である確率を求めよ。

〔 **4** 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 $\boxed{30}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

座標平面上の 3 点 $O(0,0)$、$A(2,0)$、$B(1,\sqrt{3})$ を考える。点 P_1 は線分 AB 上にあり、A、B とは異なる点とする。

線分 AB 上の点 $P_2, P_3, \ldots$ を以下のように順に定める。点 P_n が定まったとき、点 P_n から線分 OB に下ろした垂線と OB との交点を Q_n とし、点 Q_n から線分 OA に下ろした垂線と OA との交点を R_n とし、点 R_n から線分 AB に下ろした垂線と AB との交点を P_{n+1} とする。

$n \to \infty$ のとき、P_n が限りなく近づく点の座標を求めよ。

〔 **5** 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 $\boxed{31}$ の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

a, b を複素数、c を純虚数でない複素数とし、i を虚数単位とする。複素数平面において、点 z が虚軸全体を動くとき

$$w = \frac{az + b}{cz + 1}$$

で定まる点 w の軌跡を C とする。次の 3 条件が満たされているとする。

（ア）$z = i$ のときに $w = i$ となり、$z = -i$ のときに $w = -i$ となる。
（イ）C は単位円の周に含まれる。
（ウ）点 -1 は C に属さない。

このとき a, b, c の値を求めよ。さらに C を求め、複素数平面上に図示せよ。