

〔 1 〕 (配点 50 点)

座標平面上の曲線 C_1 と C_2 をそれぞれ

$$C_1 : y = ax^n \quad (x > 0)$$

$$C_2 : y = \log x \quad (x > 0)$$

とする。ただし、 n を 2 以上の整数、 a を実数とする。以下の問いに答えよ。

- (1) $x > 0$ のとき、 $\log x < x$ が成り立つことを証明せよ。
- (2) 曲線 C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるための a の条件を n を使って表せ。
- (3) a が (2) で求めた条件を満たすとする。曲線 C_1 と C_2 の異なる 2 つの交点 P, Q の x 座標をそれぞれ p, q とする。ただし $p < q$ とする。このとき、

$$p < \frac{q - p}{a(q^n - p^n)} < q$$

が成り立つことを証明せよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

自然数 n に対して定まる関数

$$f_n(x) = 1 - \sqrt{5} |\sin(2n\pi x)|$$

について、以下の問いに答えよ。

- (1) 任意の実数 x に対して $f_n(x) = f_n\left(x + \frac{k}{2n}\right)$ ($k = 1, 2, \dots, 2n$) が成り立つことを示せ。
- (2) 区間 $\left(\frac{k-1}{2n}, \frac{k}{2n}\right)$ ($k = 1, 2, \dots, 2n$) において $f_n(x) = 0$ は相異なる 2 つの解を持つことを示せ。
- (3) 区間 $[0, 1]$ における方程式 $f_n(x) = 0$ のすべての解の和を S_n とおくと、極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n}{n}$$

を求めよ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

正の定数 r に対して座標空間内の 3 点 $O(0, 0, 0)$ 、 $A(r, 0, 0)$ 、 $B(0, r, 0)$ を定める。また、平面 $y = \frac{1}{2}r$ 上の点 C に対して、線分 AC の中点を P とする。ただし、点 C の z 座標は正である。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 点 Q は線分 OB 上の点とする。定数 a, c に対し、点 C を位置 $\left(a, \frac{1}{2}r, c\right)$ に固定したとき、 $|PQ|$ を最小とする点 Q の座標を求めよ。また、このときの $|PQ|$ を求めよ。
- (2) (1) で求めた点 Q に対して、 PQ と OQ のなす角が 90° であることを示せ。
- (3) 点 C は $|OA| = |BC|$ を満たしながら動くとする。(1) で求めた点 Q と 3 点 O, C, P を頂点とする四面体の体積が最大となる点 C の座標と、そのときの四面体 $OCPQ$ の体積を求めよ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

直交座標で表された次の 2 つの方程式

$$|x| + |y| = c_1 \quad (A)$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = c_2 \quad (B)$$

を定義する。ただし c_1, c_2 は正の定数である。

- (1) xy 平面上に式 (A) を満たす (x, y) を図示せよ。
- (2) 極座標 (r, θ) を用いて, 式 (A)、(B) をそれぞれ極方程式で表せ。
- (3) 原点を除く (x, y) に対して $\frac{|x| + |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ の最大値および最小値を求めよ。

〔 5 〕 (配点 50 点)

以下の規則にしたがって数直線上を移動する点 A を考える。

(規則)

点 A が座標 x にあるとき、表が出る確率が α ($0 < \alpha < 1$) のコインを投げて、

- 表が出たら x から $\frac{x}{2}$ へ移動し、
- 裏が出たら x から $1 - \frac{x}{2}$ へ移動する。

点 A がはじめに座標 0 にあるとして、事象「上記の規則を適用する操作を n 回 ($n \geq 1$) 繰り返した直後に点 A が座標 y にある」の確率を記号 $P_n(y)$ で表す。このとき以下の問いに答えよ。

- (1) $P_1(y) > 0$ となる y ($0 \leq y \leq 1$) とその確率 $P_1(y)$ の組をすべて答えよ。
- (2) $y < 0$ または $y > 1$ のとき、 $P_n(y) = 0$ であることを示せ。
- (3) $P_n(1)$ を求めよ。
- (4) k を自然数とするとき、以下のそれぞれの条件で $P_n(2^{-k})$ を求めよ。
 - (i) $n \leq k$ のとき
 - (ii) $n > k$ のとき