

〔 1 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 15 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

座標空間内の 4 点 $O(0, 0, 0)$ 、 $A(1, 0, 0)$ 、 $B(0, 1, 0)$ 、 $C(0, 0, 2)$ を考える。
以下の問いに答えよ。

- (1) 四面体 $OABC$ に内接する球の中心の座標を求めよ。
- (2) 中心の x 座標、 y 座標、 z 座標がすべて正の実数であり、 xy 平面、 yz 平面、 xz 平面のすべてと接する球を考える。この球が平面 ABC と交わる時、その交わりとしてできる円の面積の最大値を求めよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 16 の定められた場所に記入しなさい。

【問題】

θ を $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ をみたす定数とし、 x の 2 次方程式

$$x^2 - (4 \cos \theta)x + \frac{1}{\tan \theta} = 0 \quad \dots\dots (*)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) 2 次方程式 (*) が実数解をもたないような θ の値の範囲を求めよ。
- (2) θ が (1) で求めた範囲にあるとし、(*) の 2 つの虚数解を α, β とする。
ただし、 α の虚部は β の虚部より大きいとする。複素数平面上の 3 点 $A(\alpha), B(\beta), O(0)$ を通る円の中心を $C(\gamma)$ とするとき、 θ を用いて γ を表せ。
- (3) 点 O, A, C を (2) のように定めるとき、三角形 OAC が直角三角形になるような θ に対する $\tan \theta$ の値を求めよ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 17 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

座標平面上の点 (x, y) について、次の条件を考える。

条件：すべての実数 t に対して $y \leq e^t - xt$ が成立する。…… (*)

以下の問いに答えよ。必要ならば $\lim_{x \rightarrow +0} x \log x = 0$ を使ってよい。

- (1) 条件 (*) をみたす点 (x, y) 全体の集合を座標平面上に図示せよ。
- (2) 条件 (*) をみたす点 (x, y) のうち、 $x \geq 1$ かつ $y \geq 0$ をみたすものの全体の集合を S とする。 S を x 軸の周りに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 18 の定められた場所に記入しなさい。

【問題】

自然数 n と実数 $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ ($a_n \neq 0$) に対して、2つの整式

$$f(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

$$f'(x) = \sum_{k=1}^n k a_k x^{k-1} = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1$$

を考える。 α, β を異なる複素数とする。複素数平面上の2点 α, β を結ぶ線分上にある点 γ で、

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} = f'(\gamma)$$

をみたすものが存在するとき、

$\alpha, \beta, f(x)$ は平均値の性質をもつということにする。以下の問いに答えよ。ただし、 i は虚数単位とする。

- (1) $n = 2$ のとき、どのような $\alpha, \beta, f(x)$ も平均値の性質をもつことを示せ。
- (2) $\alpha = 1 - i, \beta = 1 + i, f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が平均値の性質をもつための、実数 a, b, c に関する必要十分条件を求めよ。
- (3) $\alpha = \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \beta = \frac{1+i}{\sqrt{2}}, f(x) = x^7$ は、平均値の性質をもたないことを示せ。

〔 5 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 19 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

以下の問いに答えよ。

- (1) 自然数 n 、 k が $2 \leq k \leq n - 2$ をみたすとき、 ${}_nC_k > n$ であることを示せ。
- (2) p を素数とする。 $k \leq n$ をみたす自然数の組 (n, k) で ${}_nC_k = p$ となるものをすべて求めよ。