

〔 1 〕 (配点 50 点)

三角形 ABC において、AB, BC, AC の長さをそれぞれ 7, 8, 5 とする。
点 P, Q を $AP = 2AB$, $BQ = 2BC$ を満たすようにとる。

- (1) ベクトル RQ をベクトル RO と RS で表せ。
- (2) ベクトル RH をベクトル RD で表せ。
- (3) 三角形 RHC の面積を求めよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

m を 2 以上の自然数とする。 $3m$ 個の数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{3m}$ があり、次の漸化式を満たす:

$$a_{n+3} = a_n + p \quad (n = 1, 2, \dots, 3m - 3), \quad a_1 = 0, a_2 = 0$$

- (1) $b_n = a_{n+1} - a_n$ ($n = 1, 2, \dots, 3m - 1$) とするとき、数列 $b_1, b_2, b_3, \dots, b_{3m-1}$ の一般項を求めよ。
- (2) 数列 $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{3m}$ の一般項 a_n を求めよ。また、 $a_{3m} = 0$ となる p を p_m とおくと、 p_m を m を用いて表せ。
- (3) (2) において、 $a_n = c_m$ となる n が存在するような m の条件を求めよ。また、 $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c_m}{p_m}$ を求めよ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

$a > 1$ とする。次の連立方程式を考える：

$$x + y + z = a - 1, \quad xy + yz + zx = a, \quad xyz = a$$

このとき、 x, y, z の少なくとも 1 つは 1 以上であることを示せ。

(1) $V(a)$ を定義し、その式を求めよ。

(2) $V(a)$ の最小値を a を用いて表せ。

(3) 極限 $\lim_{a \rightarrow \infty} (V(a) - V(a - 1))$ を求めよ。また、 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \infty$ を用いて証明せよ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

正四面体 ABCD の頂点 A, B, C, D のいずれかに点 P がある。時刻 n において、点 P が頂点 B にある確率を求めよ。ただし、時刻 $n + 1$ における点 P の位置は次の規則に従う：

- 時刻 n で点 P が A にある場合、時刻 $n + 1$ では確率 $\frac{1}{3}$ で B, C, D のいずれかに移動する。
- 時刻 n で点 P が B にある場合、時刻 $n + 1$ では確率 $\frac{1}{2}$ で A, $\frac{1}{4}$ で C, $\frac{1}{4}$ で D に移動する。
- 時刻 n で点 P が C にある場合、時刻 $n + 1$ では確率 $\frac{1}{2}$ で A, $\frac{1}{4}$ で B, $\frac{1}{4}$ で D に移動する。
- 時刻 n で点 P が D にある場合、時刻 $n + 1$ では確率 $\frac{1}{2}$ で A, $\frac{1}{4}$ で B, $\frac{1}{4}$ で C に移動する。

確率を a_n, b_n, c_n, d_n とおく。

- (1) a_n の一般項を求めよ。
- (2) $b_n - c_n$ および $c_n - d_n$ を求めよ。
- (3) $n \geq 3$ のときの b_n, c_n, d_n を求めよ。

〔 5 〕 (配点 50 点)

$f(x)$ を 3 次以下の多項式とする。以下の条件を満たす $f(x)$ を求めよ:

- (a) x^2 の係数は 1 である。
 - (b) $x = 0, 1, -1$ で極値をとる。
- (2) $f(x)$ の極値を求めよ。
- (3) $g(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると、次の無限級数を求めよ:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(0)}{2021^n}$$