

〔 1 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 15 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

座標空間内の 5 点

$$O(0, 0, 0), A(1, 1, 0), B(2, 1, 2), P(4, 0, -1), Q(4, 0, 5)$$

を考える。3 点 O, A, B を通る平面を α とし、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ 、 $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とおく。以下の問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ の両方に垂直であり、 x 成分が正であるような、大きさが 1 のベクトル $\vec{n}$ を求めよ。
- (2) 平面 α に関して点 P と対称な点 P' の座標を求めよ。
- (3) 点 R が平面 α 上を動くとき、 $|PR| + |RQ|$ が最小となるような点 R の座標を求めよ。

〔 2 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 16 の定められた場所に記入しなさい。

【問題】

n を 3 以上の自然数, α, β を相異なる実数とするとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 次をみたす実数 A, B, C と整式 $Q(x)$ が存在することを示せ。

$$x^n = (x - \alpha)(x - \beta)^2 Q(x) + A(x - \alpha)(x - \beta) + B(x - \alpha) + C$$

(2) (1) の A, B, C を n, α, β を用いて表せ。

(3) (2) の A について, n と α を固定して, β を α に近づけたときの極限 $\lim_{\beta \rightarrow \alpha} A$ を求めよ。

〔 3 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 17 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

自然数 m, n が

$$n^4 = 1 + 210m^2 \cdots \textcircled{1}$$

をみたすとき、以下の問いに答えよ。

- (1) $\frac{n^2 + 1}{2}, \frac{n^2 - 1}{2}$ は互いに素な整数であることを示せ。
- (2) $n^2 - 1$ は 168 の倍数であることを示せ。
- (3) $\textcircled{1}$ をみたす自然数の組 (m, n) を 1 つ求めよ。

〔 4 〕 (配点 50 点)

【4】 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 18 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

定積分について述べた次の文章を読んで、後の問いに答えよ。

区間 $a \leq x \leq b$ で連続な関数 $f(x)$ に対して、 $F'(x) = f(x)$ となる関数 $F(x)$ を 1 つ選び、 $f(x)$ の a から b までの定積分を

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \cdots \textcircled{1}$$

で定義する。定積分の値は $F(x)$ の選び方によらずに定まる。定積分は次の性質 (A)、(B)、(C) をもつ。

$$(A) \int_a^b \{kf(x) + lg(x)\} dx = k \int_a^b f(x) dx + l \int_a^b g(x) dx$$

$$(B) a \leq c \leq b \text{ のとき、} \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

$$(C) \text{ 区間 } a \leq x \leq b \text{ において } g(x) \geq h(x) \text{ ならば、} \int_a^b g(x) dx \geq \int_a^b h(x) dx$$

ただし、 $f(x), g(x), h(x)$ は区間 $a \leq x \leq b$ で連続な関数、 k, l は定数である。

以下、 $f(x)$ を区間 $0 \leq x \leq 1$ で連続な増加関数とし、 n を自然数とする。
定積分の性質 $\boxed{\mathcal{F}}$ を用い、定数関数に対する定積分の計算を行うと、

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{i-1}{n}\right) \leq \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{i}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \cdots \textcircled{2}$$

が成り立つことがわかる。 $S_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{i-1}{n}\right)$ とおくと、不等式②と定積分の性質 $\boxed{\mathcal{A}}$ より次の不等式が成り立つ。

$$0 \leq \int_0^1 f(x) dx - S_n \leq \frac{f(1) - f(0)}{n} \cdots \textcircled{3}$$

よって、はさみうちの原理より $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_0^1 f(x) dx$ が成り立つ。

- (1) 関数 $F(x), G(x)$ が微分可能であるとき,

$$\{F(x) + G(x)\}' = F'(x) + G'(x)$$

が成り立つことを, 導関数の定義に従って示せ。また, この等式と定積分の定義①を用いて, 定積分の性質 (A) で $k = l = 1$ とした場合の等式

$$\int_a^b \{f(x) + g(x)\}dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

を示せ。

- (2) 定積分の定義①と平均値の定理を用いて, 次を示せ。

$a < b$ のとき, 区間 $a \leq x \leq b$ において $g(x) > 0$ ならば, $\int_a^b g(x)dx > 0$

- (3) (A)、(B)、(C) のうち, 空欄 [ア] に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また文章中の下線部の内容を詳しく説明することで, 不等式②を示せ。
- (4) (A)、(B)、(C) のうち, 空欄 [イ] に入る記号として最もふさわしいものを 1 つ選び答えよ。また, 不等式③を示せ。

〔 5 〕 (配点 50 点)

この問題の解答は、解答紙 19 の定められた場所に記入しなさい。

[問題]

xy 平面上の曲線 C を、媒介変数 t を用いて次のように定める。

$$x = 5 \cos t + \cos 5t, \quad y = 5 \sin t - \sin 5t \quad (-\pi \leq t < \pi)$$

以下の問いに答えよ。

- (1) 区間 $0 < t < \frac{\pi}{6}$ において、 $\frac{dx}{dt} < 0$ 、 $\frac{dy}{dx} < 0$ であることを示せ。
- (2) 曲線 C の $0 \leq t \leq \frac{\pi}{6}$ の部分、 x 軸、直線 $y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。
- (3) 曲線 C は x 軸に関して対称であることを示せ。また、 C 上の点を原点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{3}$ だけ回転させた点は C 上にあることを示せ。
- (4) 曲線 C の概形を図示せよ。