問 題 紙

1 a, b を実数とする。xy 平面上で、直線 $l : y = ax + b$ は曲線 $C : y = (x+1)(2-x)$ と、x 座標が $0 \leqq x \leqq 2$ を満たす点で接しているとする。

(1) このときの点 (a, b) の存在範囲を求め、ab 平面上に図示せよ。

(2) 曲線 C および 3 つの直線 $l,\ x = 0,\ x = 2$ で囲まれた図形の面積を最小にする a, b の値と、このときの面積を求めよ。

2 自然数 n に対して、不等式 $0 \leqq a \leqq 2b \leqq c \leqq n$ を満たす整数の組 (a, b, c) の個数を $P(n)$ とする。

(1) $P(5)$ を求めよ。

(2) 奇数 n に対して、$P(n)$ を求めよ。

3

(A)

座標空間内に 4 点 $P(3, 1, 4),\ A(1, 2, 3),\ B(1, 1, 2),\ C(2, 1, 1)$ がある。直線 PA と xy 平面の交点を A'、直線 PB と xy 平面の交点を B'、直線 PC と xy 平面の交点を C' とする。

(1) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

(2) $\triangle A'B'C'$ の面積を求めよ。

(B)

複素数平面上に、原点を中心とする正五角形 $ABCDE$ がある。頂点 A が表す複素数は 1 である。2 頂点 C, D の中点を F とし、点 F が表す複素数を h とする。

(1) $h^3 + 4h^2 + 2h - 1 = 0$ を満たすことを示せ。

(2) h を求めよ。