

問 題 紙

- 1** e を自然対数の底とする. $e \leq p < q$ のとき, 不等式

$$\log(\log q) - \log(\log p) < \frac{q-p}{e}$$

が成り立つことを証明せよ.

- 2** 閉区間 $[0, 2\pi]$ 上で定義された x の関数

$$f(x) = \int_0^\pi \sin\left(|t-x| + \frac{\pi}{4}\right) dt$$

の最大値および最小値とそのときの x の値をそれぞれ求めよ.

- 3** $\triangle ABC$ の外心 (外接円の中心) O が三角形の内部にあるとし, α, β, γ は

$$\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{0}$$

を満たす正数であるとする. また, 直線 OA, OB, OC がそれぞれ辺 BC, CA, AB と交わる点を A', B', C' とする.

- (1) $\overrightarrow{OA}, \alpha, \beta, \gamma$ を用いて $\overrightarrow{OA'}$ を表せ.
- (2) $\triangle A'B'C'$ の外心が O に一致すれば $\alpha = \beta = \gamma$ であることを示せ.

- 4** (A) n を 3 以上の自然数とする. 有限複素数列 $z_1, z_2, \dots, z_n$ の各項はいずれも方程式 $z^6 = 1$ の解の一つであり, かつ, 関係式 $z_1 + z_2 + \dots + z_n = 0$ を満たしているとする.

- (1) $z_1, z_2, \dots, z_n$ の中に 1 が含まれ, -1 が含まれていないとすれば, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ はいずれも $z_1, z_2, \dots, z_n$ の中に含まれることを示せ.
- (2) $n = 6$ のとき, (1) のような複素数列 $z_1, z_2, \dots, z_n$ のとり方の個数を求めよ.

(B) 数直線上の原点 O から出発して, 硬貨を投げながら駒を整数点上動かすゲームを考える. 毎回硬貨を投げて表が出れば +1, 裏が出れば -1, それぞれ駒を進めるとする. ただし, 点 -1 または点 3 に着いたときは以後そこにとどまるものとする.

- (1) k 回目に硬貨を投げたあと, 駒が点 1 にある確率を求めよ.
- (2) k 回目に硬貨を投げたあと, 駒がある点 X_k の期待値 $E[X_k]$ を求めよ.