

問 題 紙

1

(1) x を正数とすると、 $\log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ と $\frac{1}{x+1}$ の大小を比較せよ。

(2) $\left(1 + \frac{2001}{2002}\right)^{2002}$, $\left(1 + \frac{2002}{2001}\right)^{2002}$ の大小を比較せよ。

2

a, b を正数とし, xy 平面で不等式

$$\frac{\{x - (1 - a)\}^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$$

の表す領域 D と, 不等式 $x^2 + y^2 \leq 1$ の表す領域 E を考える。

(1) $a = 2, b = 1$ の場合に, 領域 D を図示せよ。

(2) D が E に含まれるための a, b の条件を求め, ab 平面上でその条件の表す領域を図示せよ。

3

$f(x)$ を実数全体で定義された連続関数で, $x > 0$ で $0 < f(x) < 1$ を満たすものとする。 $a_1 = 1$ とし, 順に,

$$a_m = \int_0^{a_{m-1}} f(x) dx \quad (m = 2, 3, 4, \dots)$$

により数列 $\{a_m\}$ を定める。

(1) $m \geq 2$ に対し, $a_m > 0$ であり, かつ $a_1 > a_2 > \dots > a_{m-1} > a_m > \dots$ となることを示せ。

(2) $\frac{1}{2002} > a_m$ となる m が存在することを背理法を用いて示せ。

4

(A) 関係式

$$x^a = y^b = z^c = xyz$$

を満たす 1 とは異なる 3 つの正の実数の組 (x, y, z) が、少なくとも 1 組存在するような、正の整数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。ただし、 $a \leq b \leq c$ とする。

(B) 次の問いに答えよ。ただし、偏角 θ は、 $0^\circ \leq \theta < 360^\circ$ の範囲で考えるものとする。

- (1) $|z + i| = |z - i|$ を満たす複素数 z は、実数に限ることを示せ。
- (2) 複素数平面上で z が実軸上を動くとき、複素数 $z + i$ の偏角 $\arg(z + i)$ の動く範囲を求めよ。
- (3) z を未知数とする方程式 $(z + i)^9 = (z - i)^9$ のすべての解 z について $z + i$ の偏角 $\arg(z + i)$ を求めよ。