

問 題 紙

- 1** 2 次方程式 $x^2 - px - q = 0$ は実数解 α, β を持つものとする。座標平面上の点列 $\{P_n(a_n, b_n)\}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を次のように定める。

$$(a_0, b_0) = (0, 0), \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & p \\ pq & p^2 + q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

- (1) P_2, P_3 の座標を α のみを用いて表せ。
- (2) P_n の座標を α のみを用いて表せ。
- (3) $n \rightarrow \infty$ のとき, $P_n(a_n, b_n)$ がある点 $P(a, b)$ に収束するための必要十分条件を α に関する条件として与え, その点 $P(a, b)$ を求めよ。

- 2** 0 を原点とする座標平面上の, 半径 1 の円周 $A: x^2 + y^2 = 1$ と直線 $l: y = d$ ($0 < d < 1$) との交点を P, Q とする。円周 A 上の点 $R(x, y)$ は $y > d$ の範囲を動く。線分 OR と線分 PQ の交点を S , 点 R から線分 PQ へ下ろした垂線の足を T とするとき, 線分 ST の長さの最大値を d を用いて表せ。

- 3** サイコロを n 回投げて, 3 の倍数が k 回出る確率を $P_n(k)$ とする。各 n について, $P_n(k)$ を最大にする k を $N(n)$ とする。ただし, このような k が複数あるときは, 最も大きいものを $N(n)$ とする。

- (1) $\frac{P_n(k+1)}{P_n(k)}$ を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ のとき, $\frac{N(n)}{n}$ を最小にする n と, そのときの $\frac{N(n)}{n}$ の値を求めよ。
- (3) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{N(n)}{n}$ を求めよ。

4 (A)

- (1) 平行四辺形 $ABCD$ において, $AB = CD = a, BC = AD = b, BD = c, AC = d$ とする。このとき, $a^2 + b^2 = \frac{1}{2}(c^2 + d^2)$ が成り立つことを証明せよ。
- (2) 3 つの正数 a, b, c ($0 < a \leq b \leq c$) が $a^2 + b^2 > c^2$ を満たすとき, 各面の三角形の辺の長さを a, b, c とする四面体を作れることを証明せよ。

- (B) 各点で微分可能な関数 $y = f(x)$ のグラフが右の図で与えられている。このとき, $y = f'(x)$ と $y = \int_0^x f(t)dt$ のグラフの概形を解答欄の所定の位置に描け。また, そのようなグラフを描いたポイントを列挙して説明せよ。