

問題紙

1

放物線 $R: y = -x^2 + 6$ と直線 $l: y = x$ との交点を A, B とする。直線 $y = x + t$ ($t > 0$) は放物線 R と相異なる 2 点 $C(t), D(t)$ で交わるものとする。

(1) 放物線 R と直線 l とで囲まれた図形の面積 T を求めよ。

(2) 4 つの点 $A, B, C(t), D(t)$ を頂点とする台形の面積を $S(t)$ とし、 $f(t) = \frac{S(t)}{T}$ とおく。 $f(t)$ の最大値を求めよ。

2

1 から 13 までの数が 1 つ書かれているカードが 52 枚あり、各数について 4 枚ずつある。この 52 枚のカードから、戻さずに続けて 2 枚取り出し、そのカードに書かれた数を順に x, y とする。関数 $f(x, y) = \log_3(x + y) - \log_3 x - \log_3 y + 1$ を考える。

(1) カードに書かれた数 x, y で、 $f(x, y) = 0$ となるものをすべて求めよ。

(2) $f(x, y) = 0$ となる確率を求めよ。

3

(1) 複素数 z を未知数とする方程式 $z^6 = 64$ の解をすべて求めよ。

(2) (1) で求めた解 $z = p + qi$ (p, q は実数) のうち、次の条件を満たすものをすべて求めよ。

条件: x を未知数とする 3 次方程式 $x^3 + \sqrt{3}qx + q^2 - p = 0$ が、整数の解を少なくとも 1 つもつ。