

問 題 紙

- 1** 放物線 $R: y = -x^2 + 3$ と直線 $l: y = 2x$ との交点を A, B とする. 直線 $y = 2x + t$ ($t > 0$) は放物線 R と相異なる 2 点 $C(t), D(t)$ で交わるものとする.

- (1) 放物線 R と直線 l とで囲まれた図形の面積 T を求めよ.
 (2) 4 つの点 $A, B, C(t), D(t)$ を頂点とする台形の面積を $S(t)$ とし, $f(t) = \frac{S(t)}{T}$ とおく. $f(t)$ の最大値を求めよ.

2

- (1) 複素数 z を未知数とする方程式 $z^5 + 2z^4 + 4z^3 + 8z^2 + 16z + 32 = 0$ の解をすべて求めよ.
 (2) (1) で求めた解 $z = p + qi$ (p, q は実数) のうち次の条件をみたすものをすべて求めよ. 条件: x を未知数とする 3 次方程式 $x^3 + \sqrt{3}qx + q^2 - p = 0$ が, 整数の解を少なくとも 1 つもつ.

3

1 辺の長さが 1 の正四面体 $OABC$ を考え, $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とする. 動点 P は O から A (辺 OA 上) を秒速 1 で, 動点 Q は A から B (辺 AB 上) を秒速 $\frac{1}{2}$ で, 動点 R は B から C (辺 BC 上) を秒速 1 で, 動点 S は C から O (辺 CO 上) を秒速 $\frac{1}{2}$ で, 同時に動き出す.

- (1) 動き出してから t 秒後 ($0 \leq t \leq 1$) のベクトル $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ および t を用いて表せ.
 (2) 線分 PR と線分 QS が交点 M をもつときの t ($0 \leq t \leq 1$) の値を求め, ベクトル $\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ.

4

(A) 整数に値をとる変数 x の値が, 以下の規則で変化する.

- (i) ある時刻で $x = m$ ($m \neq 0$) のとき, 1 秒後に $x = m + 1$, $x = m - 1$ である確率はともに $\frac{1}{2}$ である.
 (ii) ある時刻で $x = 0$ のとき, 1 秒後に $x = 1$ である確率は q , $x = -1$ である確率は $1 - q$ である ($0 \leq q \leq 1$).

$x = 0$ から始めて, n 秒後 ($n = 0, 1, 2, \dots$) に $x = m$ である確率を $p_n(m)$ とする.

- (1) $p_3(1) + p_3(-1)$ を求めよ.
 (2) すべての自然数 n に対し次がなりたつことを示せ: どんな整数 m についても $p_n(m) + p_n(-m)$ は q にはよらない.
 (3) $p_n(0)$ を求めよ.

(B)

- (1) 連続関数 $f(x)$ が, すべての実数 x について $f(\pi - x) = f(x)$ をみたすとき,

$$\int_0^\pi \left(x - \frac{\pi}{2}\right) f(x) dx = 0$$

がなりたつことを証明せよ.

- (2) $\int_0^\pi \frac{x \sin^3 x}{4 - \cos^2 x} dx$ を求めよ.