

問 題 紙

1

xy 平面上に曲線 $C: y = \log x (x > 0)$ を考える。

- (1) 曲線 C の接線で点 $(0, b)$ を通るものの方程式を求めよ。
- (2) 平面上に 2 組の点列 $\{A_n\}, \{B_n\}$ を次のように定める。 A_1 を $(1, 0)$ とする。 A_n が定まったとき、 A_n を通り x 軸に平行な直線と y 軸との交点を B_n とし、 B_n を通る曲線 C の接線の接点を A_{n+1} とする。このとき、2 つの線分 $A_n B_n$ と $B_n A_{n+1}$ および曲線 C とで囲まれる部分の面積 S_n を求めよ。
- (3) 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{S_n}$ の和を求めよ。ここで、 $|r| < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} nr^n = 0$ であることを用いてよい。

2

s を実数とする。 $(u_1, v_1) = (s, 1)$ とし、 $(u_n, v_n) (n \geq 2)$ を次の漸化式で定める。

$$\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n-1} \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$$

s が実数全体を動くとき、 (u_n, v_n) が描く xy 平面上の図形を l_n とする。

- (1) 図形 $l_n (n \geq 1)$ の方程式を求めよ。
- (2) $l_{2k-1} (k \text{ は正の整数})$ と y 軸との交点を中心とし、 l_{2k} に接する円の方程式を求めよ。

3

座標平面上に 3 点 $O(0, 0), A(4, 2), B(6, 0)$ を考える。平面上の直線 l に関して点 A と対称な点が線分 OB 上にあるとき、直線 l をピククリ直線と呼ぶことにする。

- (1) 点 $P(p, q)$ を通るピククリ直線 l があるとし、 l に関して A と対称な点を $A'(t, 0) (0 \leq t \leq 6)$ とするとき、 p, q, t の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (2) ピククリ直線が 2 本通る点 $P(p, q)$ の存在範囲を求め、それを図示せよ。図には三角形 OAB も書いておくこと。
- (3) 点 $P(p, q)$ を通る 2 本のピククリ直線が直交するような点 $P(p, q)$ の存在範囲を求め、それを図示せよ。

4

正六面体の各面に 1 つずつ、サイコロのように、1 から 6 までの整数がもれなく書かれていて、向かい合う面の数の和は 7 である。このような正六面体が底面の数字が 1 であるように机の上におかれている。この状態から始めて、次の試行を繰り返す。「現在の底面と隣り合う 4 面のうちの 1 つを新しい底面にする。」ただし、これらの 4 面の数字が a_1, a_2, a_3, a_4 のとき、それぞれの面が新しい底面となる確率の比は $a_1 : a_2 : a_3 : a_4$ とする。この試行を n 回繰り返した後、底面の数字が m である確率を $p_n(m) (n \geq 1)$ で表す。

- (1) $n \geq 1$ のとき、 $q_n = p_n(1) + p_n(6)$, $r_n = p_n(2) + p_n(5)$, $s_n = p_n(3) + p_n(4)$ を求めよ。
- (2) $p_n(m) (n \geq 1, m = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$ を求めよ。