

問 題 紙

1 2 行 2 列の行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える。 a, b, d が実数で $c = 0$ である行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$ を上三角行列という。また、 $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とおく。

- (1) $A^2 = E$ をみたす上三角行列 A をすべて求めよ。
- (2) $A^3 = E$ をみたす上三角行列 A をすべて求めよ。
- (3) 上三角行列 A が $A^4 = E$ をみたすとき、 $A^2 = E$ となることを示せ。

2

- (1) 関数 $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$ のグラフをかけ。
- (2) 方程式 $f(x) = a$ (a は実数) が相異なる 3 つの実数解 $\alpha < \beta < \gamma$ を持つとする。 $l = \gamma - \alpha$ を β のみを用いて表せ。
- (3) a が (2) の条件のもとで変化するとき l の動く範囲を求めよ。

3

数列 $\{a_n\}$ ($a_n > 0$) を次の規則によって定める：

$$a_1 = 1; \quad \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

曲線 $y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ と、 x 軸および 2 直線 $x = a_n$, $x = a_{n+1}$ で囲まれた図形を x 軸の周りに 1 回転させた回転体の体積を V_n とする。このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}V_n$ を求めよ。

4

(A) 原点 $O(0, 0)$ を中心とする半径 1 の円に、円外の点 $P(x_0, y_0)$ から 2 本の接線を引く。

- (1) 2 つの接点の中点を Q とするとき、点 Q の座標 (x_1, y_1) を点 P の座標 (x_0, y_0) を用いて表せ。また $OP \cdot OQ = 1$ であることを示せ。
- (2) 点 P が直線 $x + y = 2$ 上を動くとき、点 Q の軌跡を求めよ。

(B) 袋の中に赤と黄と青の玉が 1 個ずつ入っている。「この袋から玉を 1 個取り出して戻し、出た玉を同じ色の玉を袋の中に 1 個追加する」という操作を N 回繰り返した後、赤の玉が袋の中に m 個ある確率を $p_N(m)$ とする。

- (1) 連比 $p_3(1) : p_3(2) : p_3(3) : p_3(4)$ を求めよ。
- (2) 一般の N に対し $p_N(m)$ ($1 \leq m \leq N + 1$) を求めよ。