問 題 紙

1 空間のベクトル $\overrightarrow{OA} = (1\,,\,0\,,\,0)$, $\overrightarrow{OB} = (a, b, 0)$, $\overrightarrow{OC}$ が、次の条件

$$|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1, \quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}, \quad \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}, \quad \overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = \frac{5}{6}$$

をみたしているとする。ただし，a, b は正の数とする。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) 三角形 OAB の面積 S を求めよ。

(3) 四面体 $OABC$ の体積 V を求めよ。

2 放物線 $y = ax^2$ $(a > 0)$ と円 $(x-b)^2 + (y-1)^2 = 1$ $(b > 0)$ が、点 $P(p\,,\,q)$ で接しているとする。ただし，$0 < p < b$ とする。この円の中心 Q から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を R としたとき，$\angle PQR = 120^\circ$ であるとする。ここで，放物線と円が点 P で接するとは，P が放物線と円の共有点であり，かつ点 P における放物線の接線と点 P における円の接線が一致することである。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) 点 P と点 R を結ぶ短い方の弧と x 軸、および放物線で囲まれた部分の面積を求めよ。

3 さいころを投げると，1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする。さいころを n 回（$n = 1, 2, 3, \ldots$）投げるとき，出る目の積の一の位が j（$j = 0, 1, 2, \ldots, 9$）となる確率を $p_n(j)$ とする。

(1) $p_2(0)$, $p_2(1)$, $p_2(2)$ を求めよ。

(2) $p_{n+1}(1)$ を，$p_n(1)$ と $p_n(7)$ を用いて表せ。

(3) $p_n(1) + p_n(3) + p_n(7) + p_n(9)$ を求めよ。