問 題 紙

1 $a > 0, b > 0$ とする．点 $A(0, a)$ を中心とする半径 r の円が，双曲線 $x^2 - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ と 2 点 $B(s, t), C(-s, t)$ で接しているとする．ただし，$s > 0$ とする．ここで，双曲線と円が点 P で接するとは，P が双曲線と円の共有点であり，かつ点 P における双曲線の接線と点 P における円の接線が一致することである．

(1) r, s, t を，a と b を用いて表せ．

(2) $\triangle\,\mathrm{ABC}$ が正三角形となる a と r が存在するような b の値の範囲を求めよ．

2 関数 $f(x)$ と $g(\theta)$ を $f(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} \sqrt{1 - t^2}\,dt \ (-1 \leqq x \leqq 1)$, $g(\theta) = f(\cos\theta) - f(\sin\theta) \ (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ で定める。

(1) 導関数 $g'(\theta)$ を求めよ。

(2) $g(\theta)$ を求めよ。

(3) $y = g(\theta)$ のグラフをかけ。

3 行列 $A = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ に対して，座標空間の点 P_n の座標 (a_n, b_n, c_n) $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ を，$(a_1, b_1, c_1) = (1, 0, 0)$, $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$, $c_{n+1} = c_n + \sqrt{a_n b_n}$ $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ で定める。

(1) A^3 を求めよ。

(2) 点 P_2, P_3, P_4 の座標を求めよ。

(3) 点 P_n の座標を求めよ。

4 (A) さいころを投げると，1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする．
さいころを n 回 $(n = 1, 2, 3, \cdots)$ 投げるとき，出る目の積の一の位が j $(j = 0, 1, 2, \cdots, 9)$ となる確率を $p_n(j)$ とする．

(1) $p_2(0), p_2(1), p_2(2)$ を求めよ．

(2) $p_{n+1}(1)$ を，$p_n(1)$ と $p_n(7)$ を用いて表せ．

(3) $p_n(1) + p_n(3) + p_n(7) + p_n(9)$ を求めよ．

(4) $p_n(5)$ を求めよ．

(B) x, y を正の整数とする。

(1) $\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4}$ をみたす組 (x, y) をすべて求めよ。

(2) p を 3 以上の素数とする。$\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{p}$ をみたす組 (x, y) のうち，$2x + 3y$ を最小にする (x, y) を求めよ。