問 題 紙

1 平面上の長方形 $ABCD$ が次の条件 (a)、(b)、(c) をみたしているとする。

(a) 対角線 AC と BD の交点は原点 O に一致する。

(b) 直線 AB の傾きは 2 である。

(c) A の y 座標は、B, C, D の y 座標より大きい。

このとき、$a > 0, b > 0$ として、辺 AB の長さを $2\sqrt{5}a$、BC の長さを $2\sqrt{5}b$ とおく。

(1) A, B, C, D の座標を a, b で表せ。

(2) 長方形 $ABCD$ が領域 $x^2 + (y-5)^2 \leqq 100$ に含まれるための a, b に対する条件を求め、ab 平面上に図示せよ。

2 関数 $f(x)$ を $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geqq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$ により定める。

(1) a, b は実数とする。$y = ax + b$ のグラフと $y = f(x)$ のグラフがちょうど 2 つの交点を持つための a, b に対する条件を求めよ。

(2) p, q は実数で $p > 0$ とする。$y = x^3 + 6px^2 + 9p^2x + q$ のグラフと $y = f(x)$ のグラフがちょうど 4 つの交点を持つための p, q に対する条件を求め、pq 平面上に図示せよ。

3 はじめに、A が赤玉を 1 個、B が白玉を 1 個、C が青玉を 1 個持っている。表裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の硬貨を投げ、表が出れば A と B の玉を交換し、裏が出れば B と C の玉を交換するという操作を考える。この操作を n 回 $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ くり返した後に A, B, C が赤玉を持っている確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とおく。

(1) a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2 を求めよ。

(2) a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1} を a_n, b_n, c_n で表せ。

(3) n が奇数ならば $a_n = b_n > c_n$ が成り立ち、n が偶数ならば $a_n > b_n = c_n$ が成り立つことを示せ。

(4) b_n を求めよ。