

問題紙

1 座標空間に 8 点

$$O(0,0,0), \quad P(1,0,0), \quad Q(1,1,0), \quad R(0,1,0), \quad A(0,0,1), \quad B(1,0,1), \quad C(1,1,1), \quad D(0,1,1)$$

をとり、線分 BC の中点を M とする。線分 RD 上の点を $N(0,1,t)$ とし、3 点 O, M, N を通る平面と線分 PD および線分 PB との交点をそれぞれ K, L とする。

- (1) K の座標を t で表せ。
- (2) 四面体 $OKLP$ の体積を $V(t)$ とする。 N が線分 RD 上を R から D まで動くとき、 $V(t)$ の最大値と最小値およびそれらを与える t の値をそれぞれ求めよ。

2 関数 $f(x) = (x^2 - x)e^{-x}$ について、次の問いに答えよ。必要ならば、任意の自然数 n に対して $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n e^{-x} = 0$ が成り立つことを用いてよい。

- (1) $y = f(x)$ のグラフの変曲点を求め、グラフの概形をかけ。
- (2) $a > 0$ とする。点 $(0, a)$ を通る $y = f(x)$ のグラフの接線が 1 本だけ存在するような a の値を求めよ。また、 a がその値をとるとき、 $y = f(x)$ のグラフ、その接線および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

3 はじめに、 A が赤玉を 1 個、 B が白玉を 1 個、 C が青玉を 1 個持っている。表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の硬貨を投げ、表が出れば A と B の玉を交換し、裏が出れば B と C の玉を交換する、という操作を考える。この操作を n 回 ($n = 1, 2, 3, \dots$) くり返した後に A, B, C が赤玉を持っている確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とおく。

- (1) $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ を求めよ。
- (2) $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ を a_n, b_n, c_n で表せ。
- (3) a_n, b_n, c_n を求めよ。

4 xy 平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

- (1) $y = \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{2}x$ のグラフ上に無限個の格子点が存在することを示せ。
- (2) a, b は実数で $a \neq 0$ とする。 $y = ax^2 + bx$ のグラフ上に、点 $(0, 0)$ 以外に格子点が 2 つ存在すれば、無限個存在することを示せ。