

問題紙

1

xy 平面上に、点 $(0, 1)$ を通り、傾きが h の直線 l がある。

(1) xy 平面において、 l に関して点 $P(a, b)$ と対称な点を $Q(s, t)$ とする。

このとき、 a, b, h を用いて s, t を表せ。ただし、点 $P(a, b)$ は l 上にならないとする。

(2) xy 平面において、 l に関して原点 $O(0, 0)$ と対称な点を A とする。 h が

$-1 \leq h \leq 1$ の範囲を動くとき、線分 OA の長さの最大値と最小値を求めよ。

(3) h が $-1 \leq h \leq 1$ の範囲を動くときの点 A の軌跡を C とする。 C と直線

$y = 1$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

2

n を 2 以上の整数とする。1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある。ただし、異なるカードには異なる整数が書かれているものとする。この n 枚のカードから、1 枚のカードを無作為に取り出して、書かれた整数を調べてからもとに戻す。この試行を 3 回繰り返して、取り出したカードに書かれた整数の最小値を X 、最大値を Y とする。次の問に答えよ。ただし、 j と k は正の整数で、 $j + k \leq n$ を満たすとする。また、 s は $n - 1$ 以下の正の整数とする。

- (1) $X \geq j$ かつ $Y \leq j + k$ となる確率を求めよ。
- (2) $X = j$ かつ $Y = j + k$ となる確率を求めよ。
- (3) $Y - X = s$ となる確率を $P(s)$ とする。 $P(s)$ を求めよ。
- (4) n が偶数のとき、 $P(s)$ を最大にする s を求めよ。

3

m を正の奇数とする。

- (1) $(x - 1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ。
- (2) p を正の整数とすると、 $(p - 1)^m + 1$ は p で割り切れることを示せ。
- (3) r を正の整数とし、 $s = 3^{r-1}m$ とする。 $2^s + 1$ は 3^r で割り切れることを示せ。