問 題 紙

$\boxed{\mathbf{1}}$ a を正の定数とし，xy 平面上の曲線 C の方程式を $y = x^3 - a^2x$ とする。

(1) C 上の点 $A(t\,,\,t^3 - a^2t)$ における C の接線を l とする。l と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。ただし，t は 0 でないとする。

(2) b を実数とする。C の接線のうち xy 平面上の点 $B(2a\,,\,b)$ を通るものの本数を求めよ。

(3) C の接線のうち点 $B(2a, b)$ を通るものが 2 本のみの場合を考え，それらの接線を l_1，l_2 とする。ただし，l_1 と l_2 はどちらも原点 $(0, 0)$ を通らないとする。l_1 と C で囲まれた図形の面積を S_1 とし，l_2 と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1 \geqq S_2$ として，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。

$\boxed{\mathbf{2}}$ $f_0(x) = xe^x$ として，正の整数 n に対して，

$$f_n(x) = \int_{-x}^{x} f_{n-1}(t)\,dt + f'_{n-1}(x)$$

により実数 x の関数 $f_n(x)$ を定める。

(1) $f_1(x)$ を求めよ。

(2) $g(x) = \displaystyle\int_{-x}^{x} (at+b)e^t\,dt$ とするとき，定積分 $\displaystyle\int_{-c}^{c} g(x)\,dx$ を求めよ。ただし，実数 a, b, c は定数とする。

(3) 正の整数 n に対して，$f_{2n}(x)$ を求めよ。

$\boxed{\mathbf{3}}$ n を 2 以上の整数とする。1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある。ただし，異なるカードには異なる整数が書かれているものとする。この n 枚のカードから，1 枚のカードを無作為に取り出して，書かれた整数を調べてからもとに戻す。この試行を 3 回繰り返し，取り出したカードに書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とする。次の問に答えよ。ただし，j と k は正の整数で，$j+k \leqq n$ を満たすとする。また，s は $n-1$ 以下の正の整数とする。

(1) $X \geqq j$ かつ $Y \leqq j+k$ となる確率を求めよ。

(2) $X = j$ かつ $Y = j+k$ となる確率を求めよ。

(3) $Y - X = s$ となる確率を $P(s)$ とする。$P(s)$ を求めよ。

(4) n が偶数のとき，$P(s)$ を最大にする s を求めよ。

$\boxed{\mathbf{4}}$ m, p を 3 以上の奇数とし，m は p で割り切れないとする。

(1) $(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ。

(2) $(p-1)^m+1$ は p で割り切れることを示せ。

(3) $(p-1)^m+1$ は p^2 で割り切れないことを示せ。

(4) r を正の整数とし，$s=3^{r-1}m$ とする。2^s+1 は 3^r で割り切れることを示せ。