問 題 紙

1 　3 人でジャンケンをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すものとする。負けた人は脱落し，残った人で次回のジャンケンを行い（アイコのときは誰も脱落しない），勝ち残りが 1 人になるまでジャンケンを続ける。このとき各回の試行は独立とする。3 人でジャンケンを始め，ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に 2 人が残っている確率を p_n，3 人が残っている確率を q_n とおく。

(1) p_1, q_1 を求めよ。

(2) p_n, q_n がみたす漸化式を導き，p_n, q_n の一般項を求めよ。

(3) ちょうど n 回目で 1 人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。

$\boxed{\textbf{2}}$ 平面上に同じ点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と半径 2 の円 C_2 があり，C_1 の周上に定点 A がある。点 P，Q はそれぞれ C_1，C_2 の周上を反時計回りに動き，ともに時間 t の間に弧長 t だけ進む。時刻 $t = 0$ において，P は A の位置にあって O，P，Q はこの順に同一直線上に並んでいる。$0 \leqq t \leqq 4\pi$ のとき $\triangle APQ$ の面積の 2 乗の最大値を求めよ。

3 $k,\ m,\ n$ は整数とし，$n \geqq 1$ とする。${}_mC_k$ を二項係数として，$S_k(n),\ T_m(n)$ を以下のように定める。

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k, \quad S_k(1) = 1 \quad (k \geqq 0)$$

$$T_m(n) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_mC_k\, S_k(n) \quad (m \geqq 2)$$

(1) $T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ。

(2) 一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ。

(3) p が 7 以上の素数のとき，$S_1(p-1),\ S_2(p-1),\ S_3(p-1),\ S_4(p-1)$ は p の倍数であることを示せ。