

問 題 紙

1 3人でジャンケンをする。各人はグー、チョキ、パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すものとする。負けた人は脱落し、残った人で次のジャンケンを行い（アイコのときは誰も脱落しない）、勝ち残りが1人になるまでジャンケンを続ける。このとき各回の試行は独立とする。3人でジャンケンを始め、ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に2人が残っている確率を p_n 、3人が残っている確率を q_n とおく。

- (1) p_1, q_1 を求めよ。
- (2) p_n, q_n がみたす漸化式を導き、 p_n, q_n の一般項を求めよ。
- (3) ちょうど n 回目で1人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。

2 $x > 0$ とし、 $f(x) = \log x^{100}$ とおく。

- (1) 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{100}{x+1} < f(x+1) - f(x) < \frac{100}{x}$$

- (2) 実数 a の整数部分 ($k \leq a < k+1$ となる整数 k) を $[a]$ で表す。整数 $[f(1)], [f(2)], [f(3)], \dots, [f(1000)]$ のうちで異なるものの個数を求めよ。必要ならば $\log 10 = 2.3026$ として計算せよ。

3 k, m, n は整数とし、 $n \geq 1$ とする。 ${}_mC_k$ を二項係数として、 $S_k(n), T_m(n)$ を以下のように定める。

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k, \quad S_k(1) = 1 \quad (k \geq 0)$$

$$T_m(n) = \sum_{k=1}^{m-1} {}_mC_k S_k(n) \quad (m \geq 2)$$

- (1) $T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ。
- (2) 一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ。
- (3) p が3以上の素数のとき、 $S_k(p-1)$ ($k = 1, 2, 3, \dots, p-2$) は p の倍数であることを示せ。

4 半径1の円盤 C_1 が半径2の円板 C_2 に貼り付けられており、2つの円盤の中心は一致する。 C_2 の周上にある定点を A とする。図のように、時刻 $t = 0$ において C_1 は $O(0,0)$ で x 軸に接し、 A は座標 $(0, -1)$ の位置にある。2つの円盤は一体となり、 C_1 は x 軸上をすべることなく転がっていく。時刻 t で C_1 の中心が点 $(t, 1)$ にあるように転がるとき、 $0 \leq t \leq 2\pi$ において A が描く曲線を C とする。

- (1) 時刻 t における A の座標を $(x(t), y(t))$ で表す。 $(x(t), y(t))$ を求めよ。
- (2) $x(t)$ と $y(t)$ の t に関する増減を調べ、 $x(t)$ あるいは $y(t)$ が最大値または最小値をとるときの A の座標を全て求めよ。
- (3) C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。